Ueber den
Einfluss des elektrostatischen Feldes
auf das
optische Verhalten piëzoelektrischer Krystalle.

Von

F. Pockels.

Mit 14 Figuren im Text.

Eine von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen mit dem vollen Preise gekrönte Arbeit.

Göttingen
Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung
1894.

ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN KLASSE

DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN.

NEUNUNDDREISSIGSTER BAND.

Ueber den Einfluss des elektrostatischen Feldes auf das optische Verhalten piëzoelektrischer Krystalle.

Von

F. Pockels.

Mit 14 Textfiguren.

Vorgelegt in der Sitzung der K. Gesellschaft der Wissenschaften am 4. November 1893.

I. Theil.

Ziele und Hülfsmittel der Untersuchung.

§ 1. Plan der Untersuchung.

Durch nahezu gleichzeitige Beobachtungen der Herren W. C. Röntgen[1]) und A. Kundt[2]) ist bekannt, dass die Doppelbrechung des Quarzes durch dielektrische Polarisation in einem elektrischen Felde, dessen Kraftlinien senkrecht zur krystallographischen Hauptaxe verlaufen, eine Aenderung erleidet. Jene Beobachtungen sollten einen experimentellen Nachweis dafür liefern, dass der Quarz in einem solchen elektrischen Felde eine bestimmte Deformation erleidet, welche sich aus seinem piëzoelektrischen Verhalten auf Grund des Energieprincips ableiten lässt, wie zuerst G. Lippmann[3]) für einen speciellen Fall gezeigt hat. In der That liessen sich die beobachteten Erscheinungen qualitativ als Wirkung jener Deformation erklären, wenn die Beobachtungen von Moigno und Soleil sowie von Mach und Merten über den Einfluss einseitiger Compression auf das optische Verhalten des Quarzes berücksichtigt wurden. Indessen kann man aus dieser qualitativen Uebereinstimmung noch nicht schliessen, dass jene Erklärung der elektrooptischen Wirkung — so möge weiterhin die durch dielektrische Polarisation hervorgerufene Aenderung des optischen Verhaltens piëzoelektrischer Krystalle kurz bezeichnet werden — durch die erwähnte Deformation ausreichend sei. Denn es lässt sich zeigen, dass die von den Herren Kundt und Röntgen beobachteten Erscheinungen sich qualitativ vollständig ableiten lassen ohne jede specielle Voraussetzung über ihre eigentliche Ursache, lediglich durch richtige Berücksichtigung der Symmetrieverhältnisse und durch

1) W. C. Röntgen, Wied. Ann. **18**, 213 und 534. 1883; **19**, 319. 1883.
2) A. Kundt, Wied. Ann. **18**, 228. 1883.
3) G. Lippmann, Ann. de chim. et phys. (5) **24**, 145. 1881.

die für kleine Feldstärken jedenfalls zutreffende Annahme, dass die Aenderungen der optischen Constanten der dielektrischen Polarisation proportional sind [1]).

Zur Entscheidung der wichtigen Frage, ob die elektrooptischen Erscheinungen in piëzoelektrischen Krystallen nur die Folge der im elektrischen Felde eintretenden Deformation sind, oder ob auch eine directe Einwirkung der elektrostatischen Kräfte auf die Lichtbewegung dabei stattfindet, sind demnach quantitative Untersuchungen nothwendig. Nun hat zwar Herr P. Czermak [2]) die von den Herren Kundt und Röntgen zuerst beobachtete Aenderung der Interferenzringe (Curven gleichen Gangunterschiedes) in senkrecht zur Hauptaxe geschnittenen Quarzplatten, die senkrecht zu letzterer dielektrisch polarisirt wurden, auch messend verfolgt; allein seine Beobachtungen waren (wie später des Näheren erörtert werden soll) noch nicht ausreichend, um die obige Frage zu prüfen, sondern ergaben nur eine weitere Bestätigung der Resultate, welche aus der allgemeinen Theorie der elektrooptischen Erscheinungen für den Quarz folgen [3]). Seitdem sind Beobachtungen über diesen Gegenstand meines Wissens nicht angestellt worden. Der Zweck der vorliegenden Arbeit war es, die elektrooptischen Erscheinungen an Krystallen verschiedener Symmetriegruppen — es kommen hier nur diejenigen ohne Centrum der Symmetrie in Betracht — im Hinblick auf die oben aufgeworfene Frage zu studiren. Um die letztere beantworten zu können, ist nicht nur eine vollständige quantitative Untersuchung der Aenderung des optischen Verhaltens im elektrischen Felde erforderlich, sondern auch die Bestimmung der piëzoelektrischen Constanten, weil von diesen die im elektrischen Felde eintretende Deformation abhängt, sowie jene der durch elastische Deformationen verursachten optischen Aenderungen; und um diese letzteren ermitteln zu können, muss man auch die Elasticitätsmoduln des Krystalles kennen. Hierdurch wird die Anzahl der krystallisirten Substanzen, an welchen die Untersuchung vollständig durchführbar ist, sehr beschränkt; denn um die Bestimmung aller jener physikalischen Constanten zu gestatten, müssen die Krystalle nicht nur frei von Sprüngen, Einschlüssen und optischen Störungen sein, sondern auch grosse Dimensionen besitzen. Am besten sind diese Bedingungen beim Quarz erfüllt, für welchen überdies die Elasticitätsmoduln durch Herrn W. Voigt [4]), die piëzoelektrischen Constanten durch Herrn E. Riecke und W. Voigt [5]), und die piëzooptischen Constanten — wie wir weiterhin diejenigen Constanten bezeichnen wollen, welche die Aenderungen des optischen Verhaltens durch elastische Deformationen charakterisiren — durch den Verf. [6]) bereits bestimmt worden sind.

---

1) F. Pockels, Neues Jahrb. f. Miner. Beil.-Bd. **7**, 201—224. 1890.
2) P. Czermak, Sitzungsber. d. Wiener Acad. **97** (2) 301—324. 1888.
3) Vergl die Darstellung p. 218—19 in meiner oben citirten Abhandlung.
4) W. Voigt, Wied. Ann. **31**, 474, 701. 1887.
5) E. Riecke und W. Voigt, Wied. Ann. **45**, 523. 1892.
6) F. Pockels, Wied. Ann. **37**, 269. 1889.

Als recht gut für die Untersuchung geeignet erwies sich auch das Natriumchlorat, welches leicht in grossen regulär-tetartoëdrischen Krystallen zu erhalten ist und dessen Elasticitätsconstanten ebenfalls schon von Hrn. W. Voigt[1]) bestimmt sind. Dasselbe bietet ausserdem auch besonderes Interesse dadurch, dass es Circularpolarisation besitzt.

Beim Turmalin wurden an derjenigen (brasilianischen) Varietät, welche von Hrn. W. Voigt und E. Riecke elastisch und piëzoelektrisch untersucht ist, die optischen Beobachtungen durch die starke Absorption des ordentlichen Strahles unmöglich gemacht, und es gelang nur an einer blauen, durchsichtigeren Varietät einige Beobachtungen anzustellen, welche wenigstens eine interessante Bestätigung der allgemeinen Theorie ergaben. Endlich konnten sowohl elektrooptische, als piëzoelektrische und piëzooptische Messungen, wenn auch weniger sicher als am Quarz und Natriumchlorat, am Seignettesalz (rechtsweinsaurem Kali-Natron) ausgeführt werden, welches in schönen Krystallen der sphenoidischen Hemiëdrie des rhombischen Systems zu erhalten ist. Die Bestimmung der Elasticitätsmoduln wäre an dem vorhandenen Material schwerlich ausführbar gewesen, doch ist auch gerade in diesem Falle deren Kenntniss nicht unbedingt nothwendig, um Schlüsse in Betreff der aufgestellten Frage zu ziehen.

Die Versuche, noch an einer Reihe weiterer Krystalle verschiedener Symmetriegruppen wenigstens qualitative Beobachtungen, welche zur Prüfung der allgemeinen Theorie der elektrooptischen Erscheinungen hätten dienen können, zu erhalten, ergaben nur negative Resultate, was zum Theil wohl den kleinen Dimensionen, zum Theil den optischen Anomalien und der zu starken natürlichen Doppelbrechung der untersuchten Krystalle zuzuschreiben ist. Die betreffenden Substanzen sind folgende.

Bleinitrat, regulär-tetartoëdrisch, wovon ich grosse Krystalle durch die Güte des Herrn Abbe in Jena erhalten hatte, zeigte keine Spur von elektrooptischer Wirkung, doch kann dieselbe auch durch die starke anomale Doppelbrechung verdeckt gewesen sein.

Natriumbromat, regulär-tetartoëdrisch mit optischem Drehungsvermögen, war nur in stark gestörten Krystallen zu erlangen.

Blei- und Strontiumhyposulfat, der trapezoëdrischen Tetartoëdrie des hexagonalen Systems zugerechnet, standen mir nur in nach der Basis dünn tafelförmigen Krystallen zur Verfügung, die zum Nachweis der elektrooptischen Erscheinungen ungünstig sind.

Natrium-Lithiumsulfat ($NaLiSO_4$), welches nach Hrn. H. Traube dieselbe (rhomboëdrisch-hemimorphe) Symmetrie besitzt, wie der Turmalin, wurde in verhältnissmässig grossen und gut ausgebildeten, aber optisch anomalen Krystallen untersucht, die ich, wie auch diejenigen der vorher genannten Substanzen und des $KLiSO_4$, Herrn H. Traube verdanke.

Kalium-Lithiumsulfat, der 1ten hemimorphen Tetartoëdrie des hexagonalen

1) W. Voigt, Nachr. der k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1893, 220—224.

Systems angehörend, war nur in sehr kleinen, (einige mm dicken) Krystallen zu erhalten.

Die Untersuchung der rhombisch-sphenoidischen Sulfate aus der Gruppe des Bittersalzes erschien wegen der sehr starken ursprünglichen Doppelbrechung aussichtslos, wie einige Versuche an einem Präparat von Cobaltsulfat zeigten. Dasselbe gilt von den monoklin-hemimorphen Krystallen der Weinsäure und des Rohrzuckers. —

Bevor ich zur ausführlichen Darstellung der elektrooptischen Erscheinungen am Natriumchlorat, Quarz, Turmalin und Seignettesalz übergehe, sollen zunächst die Grundlagen für deren theoretische Behandlung, und sodann die Hülfsmittel zur experimentellen Untersuchung, soweit dieselben später überall Anwendung fanden, erörtert werden.

§ 2. Allgemeine Grundlagen der Theorie.

Das optische Verhalten eines vollkommen durchsichtigen, nicht activen Krystalles für Licht von bestimmter Schwingungsdauer lässt sich durch 6 Constanten definiren, da so viele erforderlich sind, um die Orientirung der optischen Symmetrieaxen im Krystall und die Hauptlichtgeschwindigkeiten zu bestimmen. Als solche Bestimmungsstücke kann man zweckmässiger Weise die Coefficienten in der Gleichung des von F. Neumann in die Betrachtung eingeführten Ovaloids wählen, da sich mit Hülfe dieser Fläche bekanntlich die Schwingungsrichtungen und Fortpflanzungsgeschwindigkeiten für eine beliebige Wellennormalenrichtung leicht angeben lassen. Die Gleichung des Ovaloids in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem X^0, Y^0, Z^0 lautet, wenn μ^0, ν^0, π^0 die Richtungscosinus des Radiusvectors ϱ bezeichnen,

$$1)\qquad \varrho^2 = B_{11}\mu^{0^2} + B_{22}\nu^{0^2} + B_{33}\pi^{0^2} + 2B_{23}\nu^0\pi^0 + 2B_{31}\pi^0\mu^0 + 2B_{12}\mu^0\nu^0.$$

In Bezug auf die optischen Symmetrieaxen würde sie lauten:

$$1')\qquad \varrho^2 = \omega_x^2\mu^2 + \omega_y^2\nu^2 + \omega_z^2\pi^2,$$

wo ω_x, ω_y, ω_z die Hauptlichtgeschwindigkeiten sind. Daher findet man diese letzteren und die Lage der Symmetrieaxen X, Y, Z, wenn die Coefficienten B_{hk} gegeben sind, dadurch, dass man die Gleichung 1) durch Coordinatentransformation auf die Form 1') bringt. Für die Richtungscosinus der optischen Symmetrieaxen X, Y, Z, bezogen auf das Axensystem X^0, Y^0, Z^0, welche in folgender Weise bezeichnet werden sollen:

2)

	X	Y	Z
X^0	α_1	β_1	γ_1
Y^0	α_2	β_2	γ_2
Z^0	α_3	β_3	γ_3

ergeben sich dabei 3 Gleichungen, deren erste lautet:

3) $0 = B_{11}\beta_1\gamma_1 + B_{22}\beta_2\gamma_2 + B_{33}\beta_3\gamma_3 + B_{23}(\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2) + B_{31}(\beta_1\gamma_3 + \beta_3\gamma_1) + B_{12}(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1)$,

während die zwei anderen aus vorstehender durch cyclische Permutation der Grössen α, β, γ abzuleiten sind.

Sodann ist die Geschwindigkeit der senkrecht zur X-Axe polarisirten Welle durch nachstehende Formel gegeben:

4) $$\omega_x^2 = B_{11}\alpha_1^2 + B_{22}\alpha_2^2 + B_{33}\alpha_3^2 + 2B_{23}\alpha_2\alpha_3 + 2B_{31}\alpha_3\alpha_1 + 2B_{12}\alpha_1\alpha_2,$$

und für ω_y^2 und ω_z^2 gelten ganz analog gebildete Ausdrücke, in denen nur die Grössen β bezw. γ an Stelle der α stehen.

Erleidet nun das optische Verhalten durch irgend welche äussere Einwirkungen — von denen für uns nur mechanische und elektrostatische in Betracht kommen — kleine Aenderungen, so sind die B_{hk} als Functionen derjenigen Grössen anzusehen, durch welche jene Einwirkungen gemessen werden, und können nach Potenzen dieser Grössen entwickelt werden. Als solche Grössen wählen wir im Falle mechanischer Einwirkung die elastischen Deformationen $x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y$, im Falle elektrostatischer Einwirkung die auf die Volumeneinheit bezogenen inducirten Momente a, b, c[1]; diese letzteren sind, wenn V das elektrische Potential ist, bezw. gleich $-\varkappa_1\frac{\partial V}{\partial x}$, $-\varkappa_2\frac{\partial V}{\partial y}$, $-\varkappa_3\frac{\partial V}{\partial z}$, sofern die Axen X^0, Y^0, Z^0 mit den Hauptaxen des elektrischen Inductionsellipsoids (elektrischen Symmetrieaxen) zusammenfallen und $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ die Inductionsconstanten für die Richtungen X^0, Y^0, Z^0 bezeichnen, welche mit den entsprechenden Dielektricitätsconstanten K_1, K_2, K_3 durch die Relationen $K = 1 + 4\pi\varkappa$ verknüpft sind. Ist nun die optische Aenderung von der Art, dass sie zugleich mit der äusseren Einwirkung ihren Sinn umkehrt, so kann man sich in der erwähnten Potenzentwicklung zunächst auf die Glieder 1. Ordnung beschränken; ist obige Voraussetzung nicht zulässig, so wird sich dies dann darin zeigen, dass alle Coefficienten dieser Glieder verschwinden.

Es sollen nun zu Coordinatenaxen X^0, Y^0, Z^0 die ursprünglichen optischen Symmetrieaxen, bezw. bei optisch isotropen und einaxigen Krystallen krystallographische Symmetrieaxen oder Normalen von Symmetrieebenen, gewählt werden. Dann müssen bei verschwindender äusserer Einwirkung die Grössen B_{23}, B_{31}, B_{12} ebenfalls verschwinden, B_{11}, B_{22}, B_{33} aber in die Quadrate der ursprünglichen Hauptlichtgeschwindigkeiten: $\omega_x^{0^2}$, $\omega_y^{0^2}$, $\omega_z^{0^2}$ übergehen, und man erhält demnach folgende allgemeine Ansätze:

---

1) Man könnte mit gleichem Rechte die elastischen Druckkräfte $X_x, \ldots Y_z \ldots$ bezw. die („polaren") elektrischen Kraftcomponenten $-\frac{\partial V}{\partial x}$, $-\frac{\partial V}{\partial y}$, $-\frac{\partial V}{\partial z}$ als Parameter der äusseren Einwirkung wählen, und es wäre dies sogar für manche Anwendungen etwas bequemer; wir machen aber obige Festsetzung, um die Uebereinstimmung mit früheren Arbeiten aufrecht zu erhalten.

für die optische Wirkung elastischer Deformationen [1])

$$
5)\quad
\begin{aligned}
B_{11}-\omega_x^{0^2} &= a_{11}x_x + a_{12}y_y + a_{13}z_z + a_{14}y_z + a_{15}z_x + a_{16}x_y\\
B_{22}-\omega_y^{0^2} &= a_{21}x_x + a_{22}y_y + a_{23}z_z + a_{24}y_z + a_{25}z_x + a_{26}x_y\\
B_{33}-\omega_z^{0^2} &= a_{31}x_x + a_{32}y_y + a_{33}z_z + a_{34}y_z + a_{35}z_x + a_{36}x_y\\
B_{23} &= a_{41}x_x + a_{42}y_y + a_{43}z_z + a_{44}y_z + a_{45}z_x + a_{46}x_y\\
B_{31} &= a_{51}x_x + a_{52}y_y + a_{53}z_z + a_{54}y_z + a_{55}z_x + a_{56}x_y\\
B_{12} &= a_{61}x_x + a_{62}y_y + a_{63}z_z + a_{64}y_z + a_{65}z_x + a_{66}x_y;
\end{aligned}
$$

und für die optische Wirkung dielektrischer Polarisation [2]):

$$
6)\quad
\begin{aligned}
B_{11}-\omega_x^{0^2} &= e_{11}a + e_{12}b + e_{13}c\\
B_{22}-\omega_y^{0^2} &= e_{21}a + e_{22}b + e_{23}c\\
B_{33}-\omega_z^{0^2} &= e_{31}a + e_{32}b + e_{33}c\\
B_{23} &= e_{41}a + e_{42}b + e_{43}c\\
B_{31} &= e_{51}a + e_{52}b + e_{53}c\\
B_{12} &= e_{61}a + e_{62}b + e_{63}c.
\end{aligned}
$$

Die Constanten a_{hk}, deren im allgemeinsten Falle — bei triklinen Krystallen — 36 verschiedene vorhanden sind, sollen als piëzooptische, und die e_{hk}, deren Anzahl im Falle des Fehlens aller Symmetrieelemente 18 beträgt, als elektrooptische Constanten bezeichnet werden.

Einen auf analoge Ueberlegungen begründeten linearen Ansatz hat Herr W. Voigt [3]) für die durch mechanische Einwirkung in piëzoelektrischen Krystallen erzeugten elektrischen Momente gemacht. Dabei konnten wieder entweder die elastischen Deformationen, oder die Componenten der elastischen Drucke als unabhängige Variabele gewählt werden. Für die Anwendungen, welche wir hier machen werden, ist die letztere Darstellung die zweckmässigere; dann lauten die Ansätze für die elektrischen Momente der Volumeneinheit [4]):

$$
7)\quad
\begin{aligned}
a &= -(\delta_{11}X_x + \delta_{12}Y_y + \delta_{13}Z_z + \delta_{14}Y_z + \delta_{15}Z_x + \delta_{16}X_y)\\
b &= -(\delta_{21}X_x + \delta_{22}Y_y + \delta_{23}Z_z + \delta_{24}Y_z + \delta_{25}Z_x + \delta_{26}X_y)\\
c &= -(\delta_{31}X_x + \delta_{32}Y_y + \delta_{33}Z_z + \delta_{34}Y_z + \delta_{35}Z_x + \delta_{36}X_y).
\end{aligned}
$$

Die Zahl der verschiedenen „piëzoelektrischen Moduln“ δ_{hk} beträgt im allgemeinsten Falle — in der hemimorphen Gruppe des triklinen Systems — 18; wie die elektrooptischen Constanten sind sie bei denjenigen Krystallen, welche ein Centrum der Symmetrie besitzen, sämmtlich gleich Null.

1) F. Pockels, Wied. Ann. **37**, 152. 1889.

2) F. Pockels, Neues Jahrb. f. Min., Beil.-Bd. **7**, 203. 1890.

3) W. Voigt, Allgemeine Theorie der piëzo- und pyroelektrischen Erscheinungen an Krystallen, Abhandl. der k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Bd. **36**, 1890.

4) W. Voigt, l. c. p. 22.

Aus dem Energieprincip ergiebt sich nun, dass ein piëzoelektrisch erregbarer Krystall, wenn er in ein elektrisches Feld gebracht wird, eine gewisse Deformation erleidet, und zwar lässt sich eine reciproke Beziehung zwischen dieser Deformation und der elektrischen Erregung durch Druck ableiten, welche gestattet, die erstere mit Hülfe der Constanten δ_{hk} des Ansatzes 7) zu berechnen. Bildet man nämlich mit Berücksichtigung jenes Ansatzes den Ausdruck für die potentielle Energie der Volumeinheit eines homogen elastisch deformirten und dielektrisch polarisirten Krystalles, so kommen zu dem gewöhnlichen elastischen Potential und zu der Energie der dielektrischen Polarisation jetzt die Glieder hinzu:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(\delta_{11} X_x + \delta_{12} Y_y + \delta_{13} Z_z + \delta_{14} Y_z + \delta_{15} Z_x + \delta_{16} X_y) + \frac{\partial V}{\partial y}(\delta_{21} X_x + \ldots\ldots) + \frac{\partial V}{\partial z}(\delta_{31} X_x + \ldots\ldots)$$

oder auch, wenn jetzt a, b, c die durch die äusseren elektrischen Kräfte inducirten Momente bezeichnen, und wenn, wie es bei allen späteren Anwendungen der Fall ist, die optischen Symmetrieaxen X^0, Y^0, Z^0 zugleich die elektrischen Symmetrieaxen sind:

$$-\frac{a}{\varkappa_1}(\delta_{11} X_x + \ldots\ldots) - \frac{b}{\varkappa_2}(\delta_{21} X_x + \ldots\ldots) - \frac{c}{\varkappa_3}(\delta_{31} X_x + \ldots\ldots).$$

Da nun allgemein die partiellen Ableitungen der potentiellen Energie nach $-X_x$, $-Y_y$ etc. die im Gleichgewichtszustande vorhandenen Deformationen x_x, $y_y\ldots$ liefern, so sind diejenigen Deformationen, welche in Folge der dielektrischen Polarisation a, b, c auftreten, gegeben durch nachstehende Ausdrücke[1]):

$$8)\quad \left|\begin{aligned}
x_x &= \frac{\delta_{11}}{\varkappa_1} a + \frac{\delta_{21}}{\varkappa_2} b + \frac{\delta_{31}}{\varkappa_3} c \\
y_y &= \frac{\delta_{12}}{\varkappa_1} a + \frac{\delta_{22}}{\varkappa_2} b + \frac{\delta_{32}}{\varkappa_3} c \\
z_z &= \frac{\delta_{13}}{\varkappa_1} a + \frac{\delta_{23}}{\varkappa_2} b + \frac{\delta_{33}}{\varkappa_3} c \\
y_z &= \frac{\delta_{14}}{\varkappa_1} a + \frac{\delta_{24}}{\varkappa_2} b + \frac{\delta_{34}}{\varkappa_3} c \\
z_x &= \frac{\delta_{15}}{\varkappa_1} a + \frac{\delta_{25}}{\varkappa_2} b + \frac{\delta_{35}}{\varkappa_3} c \\
x_y &= \frac{\delta_{16}}{\varkappa_1} a + \frac{\delta_{26}}{\varkappa_2} b + \frac{\delta_{36}}{\varkappa_3} c.
\end{aligned}\right.$$

1) F. Pockels, N. Jahrb. f. Min., Beil.-Bd. 7, 222—228. — Im Falle des monoklinen und triklinen Systems müssten bei der obigen Verfügung über X^0, Y^0, Z^0 an Stelle von $\frac{a}{\varkappa_1}$, $\frac{b}{\varkappa_2}$, $\frac{c}{\varkappa_3}$ immer $-\frac{\partial V}{\partial x}$, $-\frac{\partial V}{\partial y}$, $-\frac{\partial V}{\partial z}$ beibehalten werden.

Kennt man also die piëzoelektrischen Moduln und die Dielektricitätsconstanten (— die Kenntniss der letzteren ist nur soweit nothwendig, als man sie zur Bestimmung der elektrischen Kräfte im Innern des Krystalles braucht —), so kann man nach diesen Formeln die im elektrischen Felde eintretende Deformation berechnen und sodann durch Einsetzen der Ausdrücke 8) in die Gleichungen 5) auch die von jener Deformation verursachten optischen Wirkungen. Die Ausdrücke, welche man dann für $B_{11} - \omega_x^{0^2}, \ldots B_{23}, \ldots$ erhält, lassen sich durch Zusammenfassen der mit a, b, c multiplicirten Glieder auf eine zu 6) ganz analoge Form bringen:

6′)
$$\begin{aligned} B_{11} - \omega_x^{0^2} &= e'_{11} a + e'_{12} b + e'_{13} c \\ &\ldots\ldots\ldots \\ B_{23} &= e'_{41} a + e'_{42} b + e'_{43} c \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

wenn gesetzt wird

9)
$$e'_{mn} = \frac{1}{\varkappa_n} \sum_1^6 {}^h a_{mh} \delta_{nh} \qquad (m = 1, 2 \ldots 6, \; n = 1, 2, 3)$$

Wenn nun die durch dielektrische Polarisation hervorgerufenen Deformationen nicht anders auf die optischen Eigenschaften einwirken, wie die gleichen durch mechanische Kräfte erzeugten Deformationen, oder mit anderen Worten, wenn das elektrische Feld keine directe optische Wirkung ausübt, so müssen die experimentell bestimmten Grössen e_{mn} mit den aus 9) berechneten Grössen e'_{mn} identisch sein. Die Prüfung, ob diese Gleichheit besteht oder nicht, bildet demnach das Endziel der Untersuchung. Um die e_{mn} berechnen zu können, ist die Kenntniss der piëzoelektrischen Moduln und piëzooptischen Constanten nothwendig, und um die letzteren aus Beobachtungen bei einseitigem Druck — welches die praktisch hier allein ausführbare Methode zur Hervorbringung homogener Deformationen ist — bestimmen zu können, braucht man auch die Elasticitätsmoduln $s_{hk} = s_{kh}$, d. h. die Coefficienten in den linearen Ausdrücken, welche die Deformationen als Functionen der Druckkräfte darstellen:

10)
$$\left| \begin{aligned} x_x &= -(s_{11} X_x + s_{12} Y_y + s_{13} Z_z + s_{14} Y_z + s_{15} Z_x + s_{16} X_y) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_z &= -(s_{41} X_x + s_{42} Y_y + s_{43} Z_z + s_{44} Y_z + s_{45} Z_x + s_{46} X_y) \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Dagegen ist es, obgleich die $\varkappa_n$ in den Relationen 9) vorkommen, nicht erforderlich, die Dielektricitätsconstanten zu kennen; denn bei geeigneter Versuchsanordnung, z. B. wenn die zu untersuchende Krystallplatte direct zwischen zwei auf bestimmte Potentialdifferenz geladenen Metallplatten liegt, kennt man unmittelbar die elektrische Kraft im Innern des Krystalls, also $\frac{-a}{\varkappa_1}, \frac{-b}{\varkappa_2}, \frac{-c}{\varkappa_3}$,

und findet somit durch die Beobachtung nicht e_{mn}, sondern $e_{mn} \cdot \varkappa_n$. Dies ist ein grosser Vortheil, da die Bestimmung der Dielektricitätsconstanten für statische Ladungen bekanntlich sehr unsicher ist.

Die Formeln 5) bis 10) vereinfachen sich mehr oder weniger für diejenigen Krystalle, welche Symmetrieeigenschaften besitzen; denn es ergiebt sich dann eine Reduction der Anzahl der Constanten dadurch, dass man die Bedingungen aufstellt, unter denen das betreffende Formelsystem bei Vertauschung des ursprünglichen Axensystems $X^0\, Y^0\, Z^0$ mit einem krystallographisch gleichwerthigen unverändert bleibt. Eine Zusammenstellung der Formelsysteme 7) und 10) für alle 32 verschiedenen Krystallgruppen findet sich in der schon citirten „allgemeinen Theorie der piëzo- u. pyroelektrischen Erscheinungen an Krystallen“ von Herrn W. Voigt, Tabelle II und III, und eine solche der Ansätze 5) und 6) habe ich in den Arbeiten in Wied. Ann. **37**, p. 158—161 bezw. N. Jahrb. f. Min. Beil.-Bd. **7**, p. 209—210 gegeben. Daher erscheint es nicht nothwendig, hier diese Zusammenstellung zu wiederholen, und es sollen nur jedesmal zu Anfang des von einer jeden speciellen Substanz handelnden Abschnittes die besonderen für die betreffende Krystallgruppe geltenden Formeln gegeben werden.

Die bisher aufgestellten Formeln 6) und 8) umfassen nur diejenigen Deformationen und optischen Aenderungen, welche ihr Vorzeichen zugleich mit den sie erzeugenden elektrischen Momenten umkehren und demgemäss überhaupt nur bei Krystallen ohne Centrum der Symmetrie auftreten können. Ausser diesen müssen aber in allen Krystallen Deformationen und damit verbundene Aenderungen des optischen Verhaltens stattfinden, welche ihr Vorzeichen nicht wechseln, sondern dem Quadrate der elektrischen Kraft proportional sind. Diese Aenderungen, welche von der gewöhnlich als Elektrostriction bezeichneten Wirkung des elektrischen Feldes herrühren, waren aber bei den Verhältnissen, unter welchen meine Beobachtungen angestellt wurden, jedenfalls verschwindend klein, wie am Beispiel des Quarzes später durch Rechnung nachgewiesen werden wird. Uebrigens wurden die Beobachtungen, indem sie bei positiver und negativer Elektrisirung ausgeführt wurden, auch stets so eingerichtet, dass die Wirkungen 1ter Ordnung von den etwa vorhandenen 2ter Ordnung getrennt werden konnten. Wenn in einem Falle (beim Seignettesalz) dennoch eine starke sich nicht mit dem Elektrisirungssinne umkehrende optische Wirkung beobachtet wurde, so ist dieselbe sehr wahrscheinlich auf andere Ursachen, als auf die Elektrostriction, zurückzuführen, ähnlich wie ja auch die von Kerr entdeckte Doppelbrechung dielektrisch polarisirter Flüssigkeiten nicht von einer Deformation herrühren kann.

§ 3. **Experimentelle Hülfsmittel.**

a. Messung von Gangunterschieden.

Die optischen Beobachtungen bestanden, abgesehen von der Bestimmung der Schwingungsrichtungen im Natriumchlorat (und Turmalin), welche dort

ausführlicher besprochen werden wird, in Messungen der durch dielektrische Polarisation der Krystalle hervorgerufenen Gangunterschiede der beiden Wellen für verschiedene Fortpflanzungsrichtungen. Es war nämlich nicht nothwendig, die absoluten Aenderungen der Lichtgeschwindigkeiten zu messen, weil bei denjenigen Krystallen, an welchen überhaupt quantitative optische Beobachtungen ausführbar waren (d. i. Natriumchlorat, Quarz und Seignettesalz), der allgemeinen Theorie zufolge bereits aus der Aenderung der Doppelbrechung, also aus den relativen Verzögerungen, sämmtliche elektrooptische Constanten bestimmt werden können. Zur Ermittelung der relativen Verzögerung in der Richtung der Hauptaxe im Quarz diente die Messung der Durchmesser der Curven gleichen Gangunterschiedes; Näheres über die Ausführung und Berechnung dieser Beobachtungen wird aber erst in dem speciell vom Quarz handelnden Abschnitte mitgetheilt werden, weil dabei die dem Quarz eigenthümliche Circularpolarisation wesentlich in Betracht kommt. In allen übrigen Fällen wurde die Messung des Gangunterschiedes mittelst eines Babinet'schen Compensators ausgeführt, und zwar eines solchen der gewöhnlichen Construction, wobei man zwischen gekreuzten Nicols im homogenen Licht eine Reihe paralleler schwarzer Interferenzstreifen, im weissen Licht einen schwarzen Streifen und zu beiden Seiten desselben farbige sieht. Dem Abstand zweier benachbarter Streifen entsprachen bei Anwendung von Natriumlicht 23,80 Umdrehungen der Mikrometerschraube, deren Trommel in 100 Theile getheilt war; eine Drehung um 1 Trommeltheil brachte also einen Gangunterschied von $\frac{1}{2380}$ Wellenlänge hervor.

Dieser Compensator war auf einem metallenen Fuss so aufgestellt, dass er um eine horizontale, der Beobachtungsrichtung parallele Axe um einen beliebigen, ungefähr messbaren Winkel gedreht werden konnte, damit man seine Schwingungsrichtungen jederzeit mit denen der zu untersuchenden Krystallplatte zur Coincidenz bringen konnte. Er wurde möglichst dicht hinter der Krystallplatte in deutlicher Sehweite aufgestellt, sodass der schwarze Streifen gut mit blossem Auge fixirt werden konnte. Der letztere wurde auf die Mitte eines ihm parallel verlaufenden Spaltes eingestellt, der von zwei vor dem Compensator verschiebbaren kleinen Blechen begrenzt wurde und somit hinter der gerade zu untersuchenden Stelle des Krystalles eingestellt werden konnte; damit dabei die Beobachtungsrichtung genügend festgelegt war, wurde vor dem analysirenden Nicol ein Diaphragma mit einer kleinen Oeffnung angebracht. Gemessen wurde dann die Anzahl $\varDelta$ von Umdrehungen der Mikrometerschraube (oder die durch die Ganghöhe dieser Schraube ausgedrückte Verschiebung des einen Quarzkeiles), die erforderlich war, um den in Folge eines durch äussere Einwirkung im Krystall erzeugten Gangunterschiedes verschobenen schwarzen Streifen in die Mitte des Spaltes zurückzubringen. Wenn die zu einander senkrecht gestellten Hauptschnitte des Polarisators und Analysators unter 45° gegen die Schwingungsrichtungen des Krystalls geneigt sind und letztere mit denjenigen des Compensators zusammenfallen, so ist dann im Falle eines inactiven Krystalles jener Gangunterschied $\overline{\varDelta}$,

in Wellenlängen ausgedrückt, $= \frac{-\varDelta}{23{,}8}$, wobei er positiv gerechnet ist als Verzögerung der parallel zum Compensatorstreifen oder Spalt polarisirten Welle (1) gegen die senkrecht dazu polarisirte (2). Bezeichnen ω_1, ω_2 die Geschwindigkeiten, λ_1, λ_2 die Wellenlängen dieser beiden Wellen nach der Aenderung, ω_1^0, ω_2^0, λ_1^0, λ_2^0 deren ursprüngliche Werthe, n_1, n_2, n_1^0, n_2^0 die entsprechenden Brechungsindices, λ die Wellenlänge und v die Lichtgeschwindigkeit in Luft, endlich L^0 und L die Weglänge des Lichtes im Krystall vor und nach der Einwirkung (welche im Allgemeinen eine Dickenänderung zur Folge hat), so ist

$$\bar{\varDelta} = L\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) - L^0\left(\frac{1}{\lambda_1^0} - \frac{1}{\lambda_2^0}\right) = \frac{L}{\lambda}(n_1 - n_2) - \frac{L^0}{\lambda}(n_1^0 - n_2^0)$$

$$= \frac{L^0}{\lambda}\left\{(n_1 - n_1^0) - (n_2 - n_2^0)\right\} + \frac{L - L^0}{\lambda}(n_1^0 - n_2^0),$$

wofür man mit hinreichender Annäherung schreiben kann

$$\text{11)} \qquad \frac{-\varDelta}{23{,}8} = \bar{\varDelta} = \frac{L^0}{2\lambda}\left\{\frac{\omega_2^2 - \omega_2^{0^2}}{v^2}\,n_2^{0^3} - \frac{\omega_1^2 - \omega_1^{0^2}}{v^2}\,n_1^{0^3}\right\} + \frac{L - L^0}{\lambda}(n_1^0 - n_2^0).$$

Die Grössen $\omega_2^2 - \omega_2^{0^2}$ und $\omega_1^2 - \omega_1^{0^2}$ sind in jedem einzelnen Falle mit Hülfe der Formeln 1) bis 4) aus den Gleichungen 5) oder 6) zu berechnen. Die Dickenänderung $L - L^0$ ergiebt sich nach einer bekannten Formel der Elasticitätstheorie aus den Deformationen $x_x, \ldots y_z, \ldots$, welche im Falle mechanischer Einwirkung durch 10), im Falle dielektrischer Polarisation durch 8) gegeben sind.

Bei Vorhandensein von Circularpolarisation erfährt sowohl die Ausführung, als die Berechnung der Compensatorbeobachtungen eine Modification, worauf aber erst beim Natriumchlorat, wo allein dieser Fall vorkam, eingegangen werden soll.

b. Bestimmung der elektrischen Feldstärke.

Die elektrooptische Untersuchung der Krystallpräparate, welche fast immer in der Gestalt rechteckiger (meist nahezu quadratischer) Platten zur Anwendung kamen, erfolgte, allgemein zu reden, in dem elektrischen Felde zwischen zwei parallelen grösseren leitenden Platten, von denen die eine zur Erde abgeleitet, die andere mit der inneren Belegung einiger Leydener Flaschen verbunden war, welche mittelst einer Holtz'schen Influenzmaschine geladen wurden. Es handelt sich nun um die Bestimmung der elektrischen Kraft $-\frac{\partial V}{\partial n}$ innerhalb der Krystallplatte. — Wird die letztere von den Conductorplatten direct berührt, so ist das Potentialgefälle in ihrem Inneren, unabhängig von ihrer Dielektricitätsconstante, direct gegeben durch

$$\text{12)} \qquad \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{V}{D},$$

wo V das Potential, auf welches die eine Conductorplatte geladen ist, und D die

Dicke der Krystallplatte bezeichnet. Nahe an den Rändern der Krystallplatte können allerdings Abweichungen von dem geradlinigen Verlauf der Kraftlinien und folglich auch von obiger Feldstärke stattfinden, die aber sehr gering sind, wenn die Conductorplatten über die Krystallplatten etwas hinüberragen; dass dieselben in der That nur einen sehr kleinen Einfluss auf den beobachteten Gangunterschied hatten, wurde durch vergleichende Messungen in der Mitte und nahe an den Rändern der Platten wiederholt constatirt.

Befinden sich zwischen den Conductorplatten und der Krystallplatte isolirende Schichten, welche, wie mit Rücksicht auf eine beim Natriumchlorat zu beschreibende Anordnung vorausgesetzt werden soll, von zwei verschiedenen dielektrischen Substanzen gebildet sein mögen, so ergiebt sich unter der Annahme, dass das Feld innerhalb jeder Schicht noch merklich homogen bleibt, — was der Fall sein wird, wenn die Krystallplatte dünn ist im Verhältniss zu ihren Querdimensionen —, folgender Werth für das Potentialgefälle innerhalb der Krystallplatte:

12a) $$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{V}{D + \frac{K}{K_1} D_1 + \frac{K}{K_2} D_2};$$

darin bezeichnen D_1, D_2 die Dicken, K_1, K_2 die Dielektricitätsconstanten der beiden Zwischenschichten, und K die Dielektricitätsconstante der Krystallplatte für die Richtung senkrecht zu ihren Breitseiten. In diesem Falle ist also die Kenntniss von K erforderlich.

In jedem Falle musste aber natürlich das Potential V in absolutem Maasse bestimmt werden. Hierzu diente bei einigen Versuchsreihen, namentlich zu Anfang, unmittelbar die an einer gewöhnlichen Riess'schen Maassflasche gemessene Schlagweite, in welchem Falle die zu untersuchende optische Aenderung unmittelbar vor der Entladung beobachtet wurde. Der Maassstab, längs dessen die eine Kugel der Maassflasche verschiebbar war, war in Theile von je 1,128 mm getheilt, deren Zehntel mittelst eines Nonius direct abgelesen werden konnten. Der Durchmesser beider Kugeln betrug 1,15 cm. Da es aber wünschenswerth war, von der Ungenauigkeit der einzelnen Einstellung der Maassflasche bei kleinen Potentialen unabhängig zu sein, und da überdies die optischen Beobachtungen genauer bei constant gehaltenem Potential ausgeführt werden konnten, so wurde später ein Elektrometer mit continuirlicher Ablesung benutzt, welches im Folgenden ausführlich beschrieben ist. Es sei nur zuvor noch bemerkt, dass das Fernrohr zur Ablesung der Elektrometerausschläge zur Linken des Beobachters, und die Holtz'sche Maschine zur Rechten auf je einem besonderen Stelltisch so aufgestellt waren, dass der Beobachter, während er die Influenzmaschine langsam drehte, sowohl die optische Beobachtung ausführen als (damit abwechselnd) den Elektrometerausschlag ablesen konnte.

Construction und Theorie des Bifilar-Elektrometers.

Das Elektrometer war im Princip eine Drehwaage mit bifilarer Auf-

hängung, wie sie z. B. von Herrn Boltzmann bei seiner Untersuchung über die Dielektricitätsconstanten des Schwefels, jedoch nur zu vergleichenden Messungen, angewandt worden ist[1]). Mittelst einer solchen Drehwaage, die am einen Hebelarm eine Metallkugel trägt, welcher eine zweite, feste Metallkugel gegenübersteht, kann man das Potential, zu welchem die feste Kugel geladen wird, in absolutem Maasse bestimmen, da man einerseits das Drehungsmoment der bifilaren Aufhängung kennt, andererseits die elektrische Anziehung der beiden Kugeln und das aus ihr resultirende Drehungsmoment in absolutem Maasse berechnen kann mit Hülfe von Formeln, welche von Sir W. Thomson und G. Kirchhoff entwickelt worden sind.

Die Construction des bei der vorliegenden Untersuchung benutzten Elektrometers war nun folgende. Die beiden Kugeln befanden sich im Innern eines grossen Kastens von ca. 75 cm Höhe, 60 cm Länge und 30 cm Breite, dessen sämmtliche Wände aus Messingplatten, die durch einen starken Holzrahmen gehalten wurden, bestanden, und der den Zweck hatte, die Kugeln vor äusseren Influenzwirkungen zu schützen. Die feste Kugel (*A* in Figur 1), welche auf das zu messende Potential geladen werden sollte, wurde von einem 3 mm dicken Messingdraht, der mittelst einer Glasröhre isolirt durch die eine Seitenwand des Kastens hindurchging und aussen in eine Kugelklemme (*K*) endigte, so getragen, dass sie sich nahezu im Mittelpunkt des Kastens befand; sie war aus massivem Messing gedreht und hatte 24,8 mm Durchmesser. Der Hebel (*H H'*), an dessen einem Ende die bewegliche Kugel (*B*) hing, wurde von zwei nahezu parallelen feinen Kupferdrähten getragen, die 0,12 mm im Durchmesser maassen und oben 3,03, un-

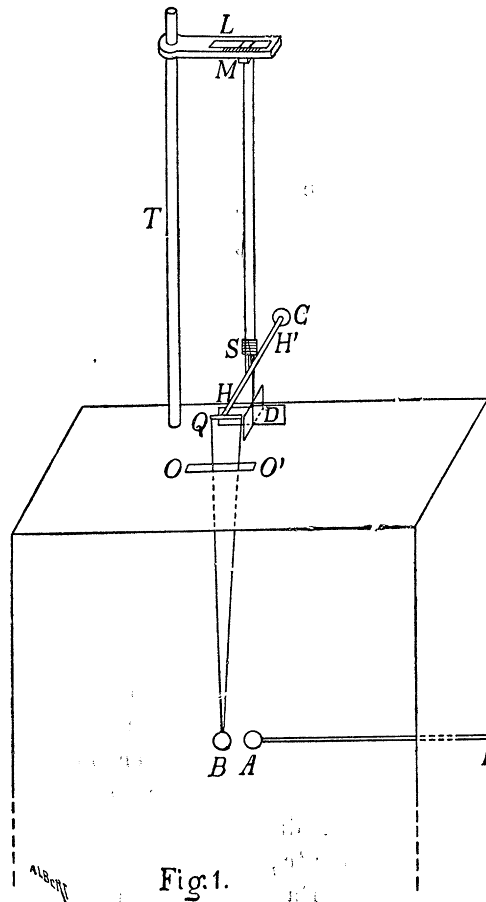


Fig. 1.

1) L. Boltzmann, Sitzungsber. der Wiener Akad. **70** (2) 342. 1874.

ten 3,04 cm gegenseitigen Abstand hatten. Dieselben waren oben befestigt an einem kleinen Messingstück (M), welches in dem Schlitz einer horizontalen Messingschiene (L) verschiebbar war. Die letztere war oben mit einer Millimetertheilung und der Schieber mit einem Nonius versehen, so dass die Verschiebung bis auf $\frac{1}{10}$ mm abgelesen werden konnte; dieselbe diente dazu, den Abstand der beweglichen Kugel von der festen zu verändern. Die Messingschiene war (vertikal verschiebbar) befestigt an einem in den oberen Holzrahmen des Kastens eingeschraubten eisernen Träger (T) von etwa 70 cm Höhe. Sie wurde den längeren horizontalen Kanten des Kastens parallel gestellt, so dass die Ebene der beiden Aufhängungsdrähte den kürzesten, von vorn nach hinten verlaufenden Kastenkanten parallel war. Die letztere Richtung hatte demnach auch — in seiner Ruhelage — der an den Drähten hängende, die bewegliche Kugel tragende Hebel HH', welcher aus einem dicken Messingdraht von 24 cm Länge bestand. In der Mitte zwischen den Aufhängungsdrähten trug der Hebel einen vertikal (und zwar nahezu senkrecht zur Hebelrichtung) gestellten kleinen Spiegel (S) zur Ablesung der Drehung mittelst Fernrohr und Scala. Am vorderen Hebelende war ein Querarm (Q) von ca. 3 cm Länge, an dem mittelst zweier feiner Kupferdrähte die bewegliche Kugel (B) hing, und am hinteren Hebelende eine gleiche, als Gegengewicht dienende Kugel (C) befestigt. Die Drähte, welche die Kugel B trugen, gingen frei durch einen Schlitz (OO') in der Deckelplatte des Kastens hindurch. Ihre Länge, sowie die Höhe, in welcher die Messingschiene L am Träger T festgeklemmt wurde, war so gewählt, dass die Kugel B genau in gleicher Höhe mit der festen Kugel A hing; dabei befand sich der Hebel etwa 11 cm über der Kastendeckelplatte. Ferner war die Stellung des Trägers T bezw. die Länge des Hebels so bemessen, dass sich das vordere Hebelende und somit auch der Mittelpunkt der Kugel B gerade in der zu den vertikalen und den längeren horizontalen Kanten parallelen Halbirungsebene des Kastens befand; daher fiel die Bewegungsrichtung der Kugel B bei kleinen Drehungen des Hebels genau in die Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte, so dass die gesammte Anziehung zur Wirkung gelangte. Der Abstand der beweglichen Kugel, welche übrigens der festen genau gleich war, von der letzteren konnte mittelst Verschiebung von M etwa zwischen 2 cm und 6 cm — von den Kugeloberflächen aus gerechnet — variirt werden. Damit derselbe genau mittelst eines Kathetometers gemessen werden konnte, was wenigstens einmal nothwendig war, aber öfter wiederholt wurde, waren in der Höhe der beiden Kugeln in der Hinter- und Vorderwand des Kastens einander gegenüber zwei rechteckige Oeffnungen ausgeschnitten, durch welche hindurch man die Kugeln bei geeigneter Beleuchtung sehen konnte; für gewöhnlich waren diese Oeffnungen durch Stanniolstücke verschlossen. Da der Hebel mit den Kugeln B und C ein grosses Trägheitsmoment besass, was übrigens den Vortheil grosser Unempfindlichkeit des Apparates gegen Luftzug gewährte, so war sehr kräftige Dämpfung erforderlich. Als Dämpfer diente daher ein in der Mitte des Hebels an dessen Unterseite befestigtes Kreuz aus Aluminiumblech (D), dessen Flügel etwa 3,7 cm hoch und 6 cm

lang waren und in eine mit Glycerin gefüllte, auf dem Kastendeckel aufgestellte cylindrische Glasschale ganz eintauchten, und zwar so, dass zwischen den Flügeln und dem Boden sowie der Seitenwand des Glasgefässes nur wenige Millimeter Abstand blieben. Diese Dämpfungsvorrichtung functionirte gut und bewirkte eine ruhige Einstellung der Drehwaage nach wenigen Schwingungen.

Theorie des Elektrometers. Das Drehungsmoment der bifilaren Aufhängung bei einer kleinen Ablenkung ψ (in Bogenmaass) des Hebels aus seiner Ruhelage ist

$$N = \left(\frac{OUG}{4L} + 2D\right)\psi = n \cdot \psi,$$

wenn bezeichnet: L die Länge der Aufhängungsdrähte, O, U deren Abstand am oberen und unteren Ende, G das gesammte an ihnen hängende Gewicht, D das von der Torsion 1 eines der Drähte herrührende Drehungsmoment — alles in *cgs*-Einheiten ausgedrückt. Es war $O = 3{,}03$, $U = 3{,}04$ cm, L anfangs $(L_1) = 55{,}4$ cm, später nach Neuaufstellung des Apparates $(L_2) = 56{,}3$ cm. G setzt sich zusammen aus dem Gewicht des Hebels mit den beiden Kugeln, welches 154,48 Gramm betrug, und demjenigen des Aluminiumdämpfers nebst Stiel: $24{,}5 + 0{,}5 = 25{,}0$ gr, welches aber um dessen Gewichtsverlust in Glycerin: $24{,}5\left(1 - \frac{1{,}26}{2{,}7}\right) = 11{,}2$ gr zu vermindern ist; somit wird $G = 168{,}3 \cdot 981$ Dynen.

Das Moment D wurde dadurch ermittelt, dass die Schwingungsdauer T eines Messingstabes von bekanntem Trägheitsmoment M beobachtet wurde, welcher an einem Stück des zur Suspension des Elektrometers verwendeten Kupferdrahtes von bestimmter Länge L' hing; daraus ergiebt sich $D = \frac{\pi^2}{T^2} M \frac{L'}{L}$. Auf diese Weise wurde gefunden $2D = \frac{1990}{L}$, d. i. $= 36$ für $L = L_1$, $= 35{,}4$ für $L = L_2$. Schliesslich wird daher

$$\begin{aligned} &\text{für } L = L_1 \qquad N = N_1 = 6883 \cdot \psi \\ &\text{für } L = L_2 \qquad N = N_2 = 6810 \cdot \psi. \end{aligned}$$

Diesem Drehungsmoment wird das Gleichgewicht gehalten durch dasjenige, welches von der Anziehung zwischen der festen, auf das Potential V geladenen Kugel und der beweglichen, durch die Aufhängungsdrähte und den Träger T mit dem zur Erde abgeleiteten Schutzkasten leitend verbundenen beweglichen Kugel B hervorgebracht wird. Da die in der Kugel B influenzirte Elektricitätsmenge ebenso wie die Ladung der Kugel A dem auf der letzteren herrschenden Potentialwerthe V proportional ist, so ist die Anziehung gleich $F \cdot V^2$, wo F eine näher zu bestimmende Function des Abstandes der beiden Kugeln ist. Diese Kraft wirkt am Ende eines Hebelarmes von der Länge l (gleich der halben Länge des Hebels HH'), welche 12,12 cm betrug, übt also das Drehungsmoment lFV^2 auf den Hebel aus. Demnach gilt für die Gleichgewichtslage des Hebels:

$$\psi n = l F V^2,$$

und man hat zur Berechnung von V die Formel

$$V^2 = \frac{n}{lF}\psi = \frac{n}{lF}\cdot\frac{\alpha}{2A}, \tag{13}$$

wo A den Abstand der Scala vom Spiegel und α die im Fernrohr beobachtete Scalenverschiebung bezeichnet.

Es handelt sich nun um die theoretische Bestimmung der Function F, d. h. der Anziehung zwischen zwei gleichen Kugeln, deren eine auf das Potential 1 und deren andere auf das Potential 0 gebracht ist, und die sich in der oben beschriebenen Lage innerhalb eines rechteckigen Kastens mit zur Erde abgeleiteten Wänden befinden. Wird der Einfluss der Wände des Schutzkastens und der Zuleitungsdrähte vernachlässigt, so kann man die Werthe von F, welche in diesem Falle mit F^0 bezeichnet werden mögen, bequem nach der folgenden von G. Kirchhoff[1]) entwickelten Formel berechnen:

$$F^0 = \frac{q^3}{1-q^2} + q^9\frac{1+q^6}{1-q^6}\left\{4 - \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{6q^6}{1-q^{12}}\right\} + \dots\dots, \tag{14}$$

worin

$$q = \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}\sqrt{c^2-4}$$

ist, wenn c das Verhältniss des Abstandes der Kugelmittelpunkte zum Kugelradius r bezeichnet. Zugleich gelten folgende Formeln für die auf den Kugeln vorhandenen Elektricitätsmengen a_{11} (auf der geladenen) und a_{12} (auf der zur Erde abgeleiteten Kugel):

$$\begin{aligned} a_{11} &= +r\left\{1 + q^2 + q^8(1-q^2)\frac{1+q^6}{1-q^6} + \dots\right\} \\ a_{12} &= -r\left\{\frac{1}{c} + q^3 + q^{11}\frac{(1-q^2)(1-q^{14})}{(1-q^6)(1-q^8)} + \dots\right\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Für die Werthe F^0 im Intervall $2 < c < 4$ hat Sir W. Thomson[2]) eine Tabelle berechnet. Bei dem hier beschriebenen Elektrometer kamen aber überwiegend Kugelabstände in Betracht, für welche $c > 4$ war und bis zu 6,8 stieg; daher sind in nachstehender Tabelle die nach 14) berechneten Werthe von F^0 für um je 0,1 auseinanderliegende Werthe c im Intervall $4 < c < 6{,}8$ zusammengestellt.

---

1) G. Kirchhoff, Wied. Ann. **27**, 673. 1886; ges. Abhandl., Nachtrag, Leipzig 1891, 131—137.

2) W. Thomson, Phil. Mag. (4) V 287. 1853; Papers on Electr. and Magn. p. 96.

c	q	F^0	c	q	F^0	c	q	F^0
4,0	0,26795	0,020754	5,0	0,20871	0,0095084	6,0	0,17157	0,0052041
4,1	0,26045	9,018975	5,1	0,20426	0,0088956	6,1	0,16859	0,0049324
4,2	0,25338	0,017401	5,2	0,20000	0,0083353	6,2	0,16572	0,0046803
4,3	0,24671	0,016003	5,3	0,19592	0,0078222	6,3	0,16295	0,0044451
4,4	0,24041	0,014758	5,4	0,19201	0,0073513	6,4	0,16026	0,0042243
4,5	0,23448	0,013650	5,5	0,18826	0,0069186	6,5	0,15767	0,0040200
4,6	0,22877	0,012641	5,6	0,18466	0,0065201	6,6	0,15516	0,0038281
4,7	0,22338	0,011737	5,7	0,18120	0,0061522	6,7	0,15234	0,0036197
4,8	0,21826	0,010922	5,8	0,17787	0,0058120	6,8	0,15038	0,0034796
4,9	0,21377	0,010181	5,9	0,17466	0,0054965			

Der Abstand e der Kugeloberflächen von einander, mithin der Werth von $c = \frac{e}{r} + 2$, für welchen in der Gleichung 13) F zu nehmen ist, hängt nun auch ab von dem Ausschlage ψ, den die Ladung der Kugel A auf das Potential V gerade hervorgebracht hat; denn der anfängliche Kugelabstand e^0 vermindert sich durch den Ausschlag selbst um eine mit letzterem proportionale Strecke δe. Dieselbe ist in erster Näherung gegeben durch $\delta e^0 = \psi \cdot l$, nämlich gleich dem vom Hebelende beschriebenen Bogen (— der praktisch immer so klein war, dass er der Sehne gleichgesetzt werden konnte —). Es kommt aber noch eine Correctionsgrösse $\delta e'$ hinzu, die daher stammt, dass die auf die Kugel B wirkende Anziehung nicht nur ein Drehungsmoment um die Axe der Suspension, sondern auch eine Kraftcomponente liefert, welche das ganze aufgehängte System ein wenig aus der vertikalen Anfangslage ablenkt. Diese Neigung ε gegen die Vertikale ist zu berechnen aus der Gleichung

$$\varepsilon G s = F V^2 (L + \lambda),$$

wo s den Schwerpunktsabstand des ganzen Systems von den oberen Aufhängungspunkten (bei M), λ die Entfernung des Mittelpunktes der Kugel B vom Hebelende Q bezeichnet und G sowie L die frühere Bedeutung hat. Der Werth von Gs liess sich mit hinreichender Genauigkeit aus dem Gewicht und der Lage des Schwerpunktes der einzelnen Bestandtheile berechnen; es ergab sich z. B. für die erste Aufstellung $= 12630 \cdot 981$. An Stelle von FV^2 kann man nach 13) $\frac{\psi n}{l}$, oder auch, da $\psi = \frac{\delta e^0}{l}$ ist, $\frac{n}{l^2} \delta e^0$ einsetzen und erhält dann zur Berechnung der durch die Neigung ε hinzukommenden Annäherung der Kugeln $\delta e' = \varepsilon (L + \lambda)$ die Formel

$$\delta e' = \delta e^0 \cdot \frac{n}{Gs} \left(\frac{L + \lambda}{l}\right)^2.$$

Man findet daraus $\delta e' = \frac{1}{25} \delta e^0$ für die erste Aufstellung und mit hinreichender Annäherung denselben Werth auch für die spätere. Demnach ist nun die Ent-

fernung e, bezw. der Werth von c, für welchen man F^0 zu berechnen hat, gegeben durch:

16)
$$e = e^0 - \left(1 + \frac{1}{25}\right)\delta e^0 = e^0 - \frac{26}{25} l \frac{\alpha}{2A},$$
$$c = \frac{1}{r}\left(e^0 - \frac{26}{25} l \frac{\alpha}{2A}\right) + 2.$$

Da in Folge der Verminderung von e bei wachsendem Ausschlage auch F^0 zunimmt, so wächst die Anziehung und also der beobachtete Ausschlag in noch schnellerem Verhältniss als dem des Quadrates von V, was namentlich bei kleinen Anfangsabständen e^0 sehr merklich ist; wir kommen auf die Folgen dieses Umstandes unten noch zurück.

Um aus dem beobachteten Ausschlage α das Potential V zu bestimmen, könnte man, nachdem e und c nach 16) berechnet sind, aus der Tabelle S. 17 den zugehörigen Werth von F^0 entnehmen und denselben in die Formel 13) einsetzen. Bequemer ist aber ein graphisches Verfahren, welches zugleich die umgekehrte Aufgabe, d. h. die Ermittelung des bei einem bestimmten Potential V und Anfangsabstand e^0 eintretenden Ausschlages, leicht zu lösen gestattet, während man hierbei sonst auf ein umständliches Annäherungsverfahren angewiesen wäre. Dieses graphische Verfahren beruht auf der Darstellung der Werthe von F^0 als Ordinaten (y) einer Curve, deren Abscissen x die Kugelabstände e sind. Der Maassstab dieser Darstellung wurde so gewählt, dass 1 mm der Ordinaten je 2 Einheiten der 4ten Decimale von F^0 und 1 mm der Abscissen je $\frac{1}{10}$ mm von e entsprach. Die hiernach unter Benutzung der Tabelle S. 17 auf Coordinatenpapier gezeichnete Curve, deren mittlerer Theil in Fig. 2 im Verhältniss 2/5 verkleinert reproducirt ist, wird nun zur Bestimmung von $V' = V\sqrt{\frac{F}{F^0}}$ aus dem abgelesenen α wie folgt verwendet. Man berechnet zunächst δe^0 aus

$$\delta e^0 = \frac{\alpha}{2A} l,$$

sucht dann auf der Abscissenaxe den Punkt, welcher dem Abstand $e = e^0 - \frac{26}{25}\delta e^0$ entspricht, auf, misst die in demselben errichtete Ordinate y der Curve (in mm) und berechnet schliesslich V' aus der Formel

17)
$$V' = \sqrt{\frac{n}{l}\frac{\alpha}{2A} \cdot \frac{5000}{y}}.$$

Der Zahlenfactor, mit welchem hierin $\frac{\alpha}{y}$ multiplicirt auftritt, hängt von dem gerade gewählten Scalenabstand A ab, welcher bei meinen Beobachtungen 210 bis 284 cm betrug. Führt man hingegen statt α die Grösse δe^0 in die Formel ein, so erhält man einen constanten Zahlenfactor, und zwar wird, wenn δe^0 und y in mm gemessen sind, bei der ersten Aufstellung

17a) $$V' = 153 \sqrt{\frac{\delta e^0}{y}},$$

und bei der zweiten

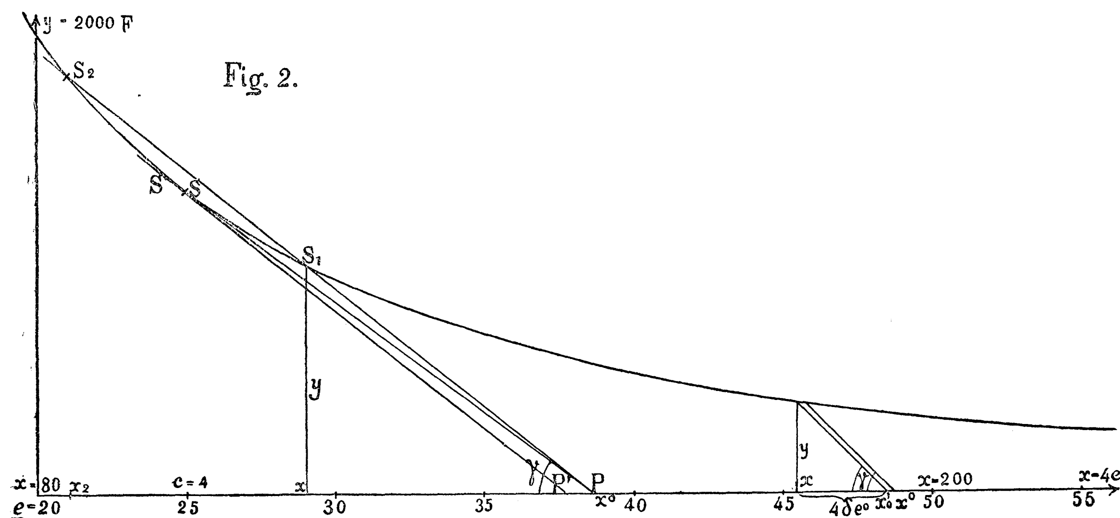
17'a) $$V' = 152{,}2 \sqrt{\frac{\delta e^0}{y}}.$$

Schliesslich kann man auch δe^0 durch die entsprechende Strecke der Abscissenaxe $x'_0 - x = 10\,\delta e^0$, (also $= 4\,\delta e^0$ in Fig. 2), ausdrücken; dann wird

17b) $$V' = 48{,}4 \sqrt{\frac{x'_0 - x}{y}} \text{ im ersten,}$$

17'b) $$V' = 48{,}1 \sqrt{\frac{x'_0 - x}{y}} \text{ im zweiten Falle.}$$

Die Abscisse x'_0 entspricht dabei nicht dem Anfangsabstande der Kugeln, sondern dem um $\delta e'$ verminderten Anfangsabstand, x dagegen entspricht der wirklichen abgelenkten Lage der Kugel B, d. h. es ist $x = 10e$. Ueber die Bestimmung des Factors, mit welchem V' noch zu multipliciren ist, um V zu erhalten, vergl. S. 21—25. — Die Formel 17b zeigt, dass V^2 bezw. V'^2 proportional ist der Cotangente des Winkels γ, welchen in der Zeichnung die Verbindungslinie des Punktes x, y der Curve und des Punktes x'_0 der Abscissenaxe mit der letzteren einschliesst. Diese Beziehung zwischen V^2 und cotg γ ermöglicht nun eine einfache graphische Bestimmung des einem gegebenen Potentiale V entsprechenden Elektrometerausschlages.



Man berechnet nämlich zunächst aus 17b) $\frac{x_0'-x}{y} = \operatorname{cotg}\gamma$ und zieht nun unter dem so gefundenen Winkel γ nach links geneigt eine Gerade durch denjenigen Punkt x^0 der Abscissenaxe, welcher dem durch directe Messung bekannten Anfangsabstande e^0 der Kugeln entspricht. Ist nun x die Abscisse des Punktes (S_1), in welchem diese Gerade die Curve $y = F^0(x)$ schneidet, so giebt die in mm gemessene Strecke $x^0 - x$, durch 10 (bezw. 4) dividirt, die Verschiebung δe^0 an, welche die Kugel B in Folge der Ladung von A auf das Potential V erfährt, und hieraus findet man den zu beobachtenden Scalenausschlag nach der Gleichung $\alpha = 2A\frac{\delta e^0}{l}$. Diese Bestimmung ist insofern noch nicht ganz genau, als man die Hülfsgerade eigentlich nicht durch den Punkt x^0, sondern durch den Punkt $x_0' = x_0 - 10\,\delta e'$ hätte ziehen müssen. Um den hierdurch begangenen kleinen Fehler zu corrigiren, kann man für $\delta e'$ den 25ten Theil des zuerst gefundenen δe^0 nehmen (was nicht ganz streng richtig, aber völlig genau genug ist) und nun durch den Punkt $x_0' = x_0 - 10\,\delta e'$ eine Parallele zu der ersten Hülfsgeraden ziehen, deren Projection auf die Abscissenaxe dann den wahren Werth von δe^0 und somit schliesslich von α liefert. (Vergl. die Construction rechts in Fig. 2). Aus dem Verlauf der Curve $y = F^0$ ist klar, dass die zur Construction benutzte Gerade die Curve ausser in S_1 im Allgemeinen noch in einem zweiten Punkte S_2 schneidet. Wie die Deutung der Relation $y = F^0 = \frac{x_0'-x}{\operatorname{cotg}\gamma}$ zeigt, entspricht auch die Abscisse x_2 dieses zweiten Schnittpunktes einer Gleichgewichtslage der beweglichen Kugel, aber einer labilen. Die Ablenkung des Hebels in dieser zweiten Gleichgewichtslage ist stets grösser, als in der ersten; wird die Ablenkung über diesen Werth noch ein wenig hinausgebracht, so kehrt die Kugel überhaupt nicht in die Gleichgewichtslage zurück, sondern nähert sich der festen Kugel bis zur Berührung. Nun zeigt die Betrachtung der Figur, dass die beiden Gleichgewichtslagen einander um so näher rücken, je grösser $\operatorname{cotg}\gamma$ oder V, und je kleiner e^0 oder x^0 genommen wird, und dass schliesslich beide zusammenfallen, indem die Constructionsgerade zur Tangente der Curve (z. B. PS bezw. $P'S'$ in Fig. 2) wird. Haben V und e^0 solche Werthe erreicht, dass dieser Grenzfall eintritt, so giebt es bei weiterer Vergrösserung von V oder Verkleinerung von e^0 überhaupt keine Schnittpunkte und somit keine Gleichgewichtslage der Elektrometerkugel. Man darf demnach bei der Benutzung des Elektrometers dieser Grenze nicht zu nahe kommen, da sie sonst leicht durch ein Hinausschwingen über die Ruhelage (wobei ja e^0 abnimmt) überschritten werden und Zusammenschlagen der Kugeln eintreten könnte. Dieser Bedingung kann aber immer dadurch genügt werden, dass man je nach den Grenzen, in denen die zu messenden Potentiale liegen sollen, den Anfangsabstand der Kugeln verschieden wählt und zwar natürlich um so grösser, je grösser die zu messenden Potentiale sind. Mit zunehmendem Anfangsabstand nimmt offenbar die Empfindlichkeit des Elektrometers ab; um kleine Potentiale zu messen, sind demnach kleine Anfangsabstände nothwendig. In

diesem Fall, d. h. wenn x_0 schon sehr klein ist, wird aber in Folge des sehr steilen Ansteigens der Curve $y = F^0$ (die sich asymptotisch der in Fig. 2 noch um 80 mm links von der Anfangsordinate liegenden Y-Axe nähert) durch weitere Abnahme von e bei den Schwingungen des Hebels sehr leicht die labile Gleichgewichtslage erreicht und überschritten. Daher ist das Elektrometer nicht gut zur Messung so kleiner Potentiale zu gebrauchen, welche im Interesse der Genauigkeit der Ablesung eine Verminderung von c bis unter den Werth 3 erfordern würden. Bei dem oben speciell beschriebenen Instrument konnte aber für alle bei der vorliegenden Untersuchung vorkommenden Potentiale, die etwa zwischen 8 und 60 c. g. s. - Einheiten lagen, der Anfangsabstand so gewählt werden (— nämlich zwischen 20 und 60 mm —), dass man immer weit von der kritischen Grenze des Ausschlages entfernt blieb.

Bei der vorhergehenden Berechnung sind die Influenzwirkungen der Metallwände des Schutzkastens und der Zuleitungsdrähte unberücksichtigt geblieben. Man kann sich aber überzeugen, dass dieselben, namentlich bei grösseren Kugelabständen, recht erhebliche Beträge erreichen und daher jedenfalls ermittelt werden müssen, wenn das Elektrometer direct zur absoluten Potentialbestimmung verwendet werden soll. Was den Einfluss der Kastenwände betrifft, so ist die in diesen durch die geladenen Kugeln A und B inducirte elektrische Belegung hinsichtlich ihrer Wirkung im Innenraum des Kastens aequivalent mit elektrischen Massen, welche in den sämmtlichen Spiegelbildern der Kugeln in Bezug auf die als spiegelnde Ebenen gedachten Kastenwände angebracht werden und den Ladungen der Kugeln entgegengesetzt oder direct gleich sind, je nachdem das betreffende Spiegelbild durch eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Spiegelungen erhalten worden ist. In Fig. 3 sind die durch einmalige Spiegelung in Bezug auf die vertikalen Seitenwände erhaltenen elektrischen Massen, welche die wirksamsten sind, angedeutet. Um den Einfluss dieser elektrischen Spiegelbilder auf die zwischen A und B wirkende Kraft zu ermitteln, würde man zunächst die Werthe des von ihnen herrührenden Potentials auf den Kugeln A und B zu berechnen haben. Sind diese Werthe $\delta V_A = v_A'' \cdot V$ und $\delta V_B = v_B \cdot V$, so müssen in den Kugeln A und B zu den bereits vorhandenen elektrischen Ladungen $a_{11} r V$ und $a_{12} r V$ gewisse Elektricitätsmengen hinzukommen, damit jene Potentialänderungen wieder aufgehoben werden, also das Potential auf A den Werth V und auf B den Werth 0 behält, wie es ja thatsächlich der Fall ist. Diese durch die Influenzwirkung

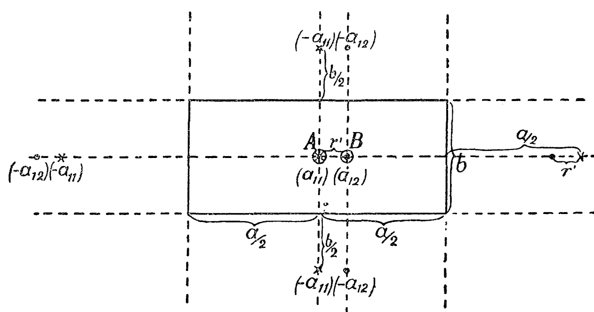


Fig. 3.

der Wände hinzuströmenden Mengen sind in erster Annäherung gegeben durch

$$-\left\{a_{11} v_A + a_{12} v_B\right\} r V \text{ für die Kugel } A,$$
$$-\left\{a_{12} v_A + a_{11} v_B\right\} r V \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad B.$$

Die elektrische Energie des ganzen Systems, welche ursprünglich $\frac{1}{2} a_{11} r V^2$ war, erhält hierdurch den Zuwachs

$$-\tfrac{1}{2}(a_{11} v_A + a_{12} v_B) r V^2$$

und folglich die Anziehung $F^0 V^2$ zwischen A und B denjenigen

18) $$F' V^2 = +\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial c}(a_{11} v_A + a_{12} v_B) \cdot V^2.$$

Hierin sind nicht nur a_{11} und a_{12}, sondern auch v_A und v_B, d. h. die Werthe des von der auf den Wänden influenzirten Belegung herrührenden Potentials auf den Kugeln A und B im Falle, dass A auf das Potential Eins geladen ist, Functionen der Entfernung der beiden Kugeln, also auch von c. Zur Berechnung derselben kann man die elektrischen Spiegelbilder als punktförmig ansehen, indem man sich die Ladungen der Kugeln in gewissen inneren Punkten concentrirt denkt, deren gegenseitiger Abstand $r' = c'r$ etwas kleiner als derjenige der Kugelmittelpunkte, nämlich durch die Gleichung

$$\frac{-a_{11} a_{12}}{r'^2} = F^0(rc)$$

bestimmt ist. Bezeichnet a die Länge des Schutzkastens (parallel der Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte), b seine Breite und h seine Höhe, so wird, wie leicht zu sehen,

$$v_A =$$
$$a_{11} r \sum^m \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^n \sum^p \frac{(-1)^{m+n+p}}{\sqrt{(ma)^2 + (nb)^2 + (ph)^2}} + a_{12} r \sum^m \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^n \sum^p \frac{(-1)^{m+n+p}}{\sqrt{(ma + (-1)^m r')^2 + (nb)^2 + (ph)^2}}$$

$$v_B =$$
$$a_{11} r \sum^m \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^n \sum^p \frac{(-1)^{m+n+p}}{\sqrt{(ma - r')^2 + (nb)^2 + (ph)^2}} + a_{12} r \sum^m \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^n \sum^p \frac{(-1)^{m+n+p}}{\sqrt{(ma - r'[1-(-1)^m])^2 + (nb)^2 + (ph)^2}},$$

wobei die Summation über alle ganzen Zahlen m, n, p zu erstrecken, jedoch das Glied, in welchem dieselben alle drei den Werth Null haben, fortzulassen ist. Die wirkliche Ausrechnung dieser dreifachen Summen würde wegen ihrer schlechten Convergenz sehr umständlich sein, hätte aber im vorliegenden Falle aus einem gleich anzugebenden Grunde auch wenig Nutzen. Um sich indessen eine Vorstellung von der Grössenordnung der Influenzwirkung F' zu verschaffen, kann man die Rechnung bei alleiniger Berücksichtigung der Spiegelung in Bezug auf

die breiteren vertikalen Wände, deren Einfluss wegen ihres geringen Abstandes den Hauptbeitrag zu F' liefert, ausführen. Dann erhält man für v_A und v_B einfach unendliche Reihen, und zwar ergiebt sich, wenn r'^4 neben b^4 vernachlässigt wird,

$$v_A = -a_{11} \cdot \frac{r}{b} 2 \log 2 - a_{12} \frac{r}{b} \left\{ 2 \log 2 + \frac{r'^2}{b^2} \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^3} \right\}$$

$$v_B = -a_{12} \cdot \frac{r}{b} 2 \log 2 - a_{11} \frac{r}{b} \left\{ 2 \log 2 + \frac{r'^2}{b^2} \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^3} \right\}.$$

Setzt man diese Werthe und die durch 15) gegebenen für a_{11} und a_{12} in Formel 18) ein, so findet man z. B. für $c = 4$ annähernd $F' = -0{,}0024$, während dann F^0 den Werth $+0{,}02075$ hat; daraus folgt, dass in diesem Falle in Folge der Influenzwirkung der Vorder- und Hinterwand allein die Anziehung der beiden Kugeln um etwa $\frac{1}{9}$ und das nach 17) berechnete Potential um etwa $\frac{6}{100}$ zu klein erscheinen würde. Dass in der That eine solche Wirkung stattfand, wurde constatirt, indem der Ausschlag des Elektrometers für ein bestimmtes Entladungspotential der Maassflasche einmal bei Vorhandensein, dann nach Fortnahme der Vorder- und Rückwand des Kastens beobachtet wurde; die betreffenden, nach 17) berechneten Potentialwerthe waren 17,45 und 18,45, ihr Unterschied also etwa $5\frac{1}{2}$ Procent.

Der Einfluss der oberen und unteren Platte ist gleichsinnig mit dem soeben berechneten, derjenige der schmalen Seitenwände hingegen wirkt entgegengesetzt, d. h. die Anziehung der Kugeln verstärkend, so dass sich beide grösstentheils compensiren. Im Ganzen bleibt also immer eine Schwächung der Anziehung übrig, welche relativ um so grösser wird, je grösser der Kugelabstand ist.

Dieser Verringerung der Anziehung durch die Influenz der Metallwände des Kastens wirkt nun aber eine Vermehrung derselben entgegen, welche von der Ladung der Zuleitungsdrähte, besonders des ziemlich dicken der festen Kugel, herrührt. Diese Wirkung entzieht sich einer genauen Berechnung; annähernd lässt sie sich bestimmen, indem man den von der Ladung der Kugeln herrührenden und somit von deren Abstande cr abhängigen Antheil der Capacität des Drahtes auswerthet, dessen halber Differentialquotient nach cr dann wieder die gesuchte, auf die bewegliche Kugel wirkende Kraft (für das Potential Eins auf A) liefert. Man findet so, dass die Vergrösserung von F durch den Zuleitungsdraht der Kugel A von derselben Grössenordnung, wahrscheinlich sogar noch etwas grösser ist, wie die Anziehungsverminderung durch die Wandwirkung, und dass sie, wie die letztere, mit wachsendem c im Verhältniss zu F^0 immer grösser wird. Mit dieser Schätzung stimmten auch die Resultate einiger Versuchsreihen überein, bei denen die Kugel A an Seidenfäden aufgehangen und ihr ursprünglicher Zuleitungsdraht durch einen 30mal dünneren ersetzt war, wodurch sich der Einfluss des Drahtes in demselben Verhältniss, wie die Capacität seiner Längeneinheit, d. i. im Verhältniss $1 : \text{lognat}\, 30 = 1 : 3{,}4$, vermindern muss. In der That wurde bei dieser Anordnung das Entladungspotential der Maassflasche beim

Kugelabstand $a = 0,5$ Theilen (= 1,128 mm) um 1 bis 2 absolute Einheiten kleiner als mit dem dicken Zuleitungsdraht und noch etwas kleiner als der bei jener Schlagweite zu erwartende Werth gefunden, so dass dann also der vermindernde Einfluss der Kastenwände schon überwiegend war. — Schliesslich muss auch die Influenz der beiden feinen Drähte, an welchen die Kugel B hing, die Anziehung zwischen A und B ein wenig vergrössert haben. — In Anbetracht der Unmöglichkeit, die besprochenen Influenzwirkungen theoretisch zu bestimmen, musste darauf verzichtet werden, das Bifilarelektrometer direct zu genauen absoluten Potentialmessungen zu verwenden. Da aber alle jene störenden Wirkungen ebenso wie die ursprünglich berechnete Kugelanziehung $F^0 V^2$ dem Quadrate des Ladungspotentials proportional sind, so wird das nach den Formeln 16) und 17) berechnete Potential V', um das wahre Potential V zu erhalten, nur jedesmal um einen gewissen Factor zu ändern sein, welcher für jeden Abstand e_0 der Elektrometerkugeln constant ist, aber sich mit diesem Abstande ändern kann, da die einzelnen Influenzwirkungen in verschiedener Weise von e_0 oder c abhängen.

Dieser Correctionsfactor wurde nun dadurch experimentell bestimmt, dass für diejenigen Potentiale, bei welchen sich die Maassflasche bei bestimmten Abständen ihrer Kugeln entlud, die Elektrometerausschläge beobachtet wurden. Es geschah dies in der Weise, dass die Maassflasche, deren innere Belegung mit der Elektrometerkugel A und ausserdem noch mit mehreren grossen Leydener Flaschen verbunden war, mittelst der Influenzmaschine so langsam geladen wurde, dass der Elektrometerausschlag stetig und zuletzt sehr langsam wuchs. Dann konnte der unmittelbar vor der Entladung abgelesene Ausschlag $\bar{\alpha}$ als Maass des Entladungspotentials angesehen werden. Die bei einer Reihe aufeinanderfolgender Entladungen beobachteten Maximalausschläge stimmten bis auf 1 bis 2 Scalentheile überein, abgesehen von demjenigen bei der ersten Entladung, der meist viel grösser war (— eine Erscheinung, welche auch Herr F. Paschen bei seiner Untersuchung über Funkenpotentiale bemerkt hat —) und deshalb immer unberücksichtigt blieb. Wenn eine grosse Anzahl Entladungen an denselben Stellen der Kugeln übergegangen waren, so zeigte sich manchmal eine geringe Zunahme des Potentials; aus diesem Grunde, sowie um den Fehler der einzelnen Messung des Kugelabstandes a auszugleichen, wurden die Kugeln der Maassflasche öfter gedreht, so dass frische Stellen einander gegenüberstanden, und neu eingestellt. Als wahre Werthe des Entladungspotentials sind diejenigen angenommen, welche Herr Heydweiller[1]) als Schlussresultate aus seinen Messungen und denjenigen von Hrn. Paschen mittheilt, und die nach seiner Angabe bis auf 1 Proc. sicher sind. Dieselben beziehen sich auf Kugelelektroden von $R = 0,25$, 0,5, 1,0 und 2,5 cm Radius und Schlagweiten d von 0,1, 0,2 ... bis 1,6 cm. Die hier zu verwerthenden Resultate für V sind folgende:

---

1) A. Heydweiller, Wied. Ann. **48**, 213—235. 1893.

d	$R = 1{,}0$ cm	$R = 0{,}5$ cm
0,1	15,7	16,0
0,2	27,0	27,9
0,3	37,9	37,9
0,4	48,3	48,5
0,5	58,3	57,7

Da das Entladungspotential für die in Betracht kommenden Schlagweiten nur in sehr geringem Maasse vom Radius der Elektroden abhängt, wenn dieser ungefähr 1 cm beträgt, so können die für $R = 1{,}0$ cm gefundenen Werthe von V auch für die Kugeln der von mir benutzten Maassflasche, welche 1,15 cm Radius besassen, mit hinreichender Genauigkeit als gültig angenommen werden. Zwar ist die Anordnung der Funkenstrecke bei der Maassflasche von derjenigen bei den Funkenmikrometern, mit welchen obige Zahlen gefunden wurden, insofern verschieden, als die Zuleitungsdrähte vertikal (also senkrecht zur Funkenstrecke) gerichtet und ziemlich dick sind; allein bei den bei meinen Versuchen benutzten kleinen Schlagweiten ist eine merkliche Influenzwirkung der Zuleitungen oder sonstigen benachbarten Metallmassen kaum zu befürchten, wie die darauf bezüglichen Versuche von Hrn. Paschen[1]) lehren, und ich für den vorliegenden Fall auch dadurch bestätigt fand, dass die seitliche Annäherung metallischer Leiter an die Funkenstrecke bis auf wenige cm keine nachweisbare Aenderung des der Entladung entsprechenden Elektrometerausschlages hervorbrachte. — Für die in Theilen des Mikrometers der Maassflasche (von je 0,2256 cm) ausgedrückten Schlagweiten a ergeben sich nun durch Interpolation aus den Heydweiller'schen Zahlen folgende Entladungspotentiale:

$a =$	0,5	0,60	0,70	0,80	0,90	1,0	1,5	2,0
$V =$	17,23	19,78	22,32	24,84	27,35	29,85	42,0	53,4.

Dieselben gelten für den Luftdruck 745 mm und die Temperatur 18° C.; sie nehmen nach Hrn. Heydweiller um je 1 Proc. zu bei einer Luftdruckvermehrung um 8 mm oder einer Temperaturerniedrigung um 3°.

Nachstehend sind die in der S. 24 erörterten Weise erhaltenen Mittelwerthe der Elektrometerausschläge $\bar{\alpha}$ und die daraus nach 17) berechneten Werthe V' für verschiedene Schlagweiten a und für diejenigen Anfangsabstände e^0 der Elektrometerkugeln, welche bei den elektrooptischen Beobachtungen vorkamen, (oder diesen sehr naheliegende) angegeben; die Werthe V' sind sodann nach der obigen Angabe auf den Luftdruck 745 mm und die Temperatur 18° reducirt. Der Scalenabstand A betrug 282 cm, die Länge der Bifilarsuspension $L_2 = 56{,}3$ cm.

$$e_0 = 24{,}65 \text{ mm.}$$

$a = 0{,}5$. Bar. 736 mm, Temp. 22°. $\bar{\alpha} = 71{,}45$. $V' = 17{,}3$, red. **17,74**.

1) F. Paschen, Wied. Ann. **37**, 69. 1889.

$e_0 = 30{,}35$ mm.
Bar. 736 mm, Temp. 22°.

$a = 0{,}5$ $\bar{\alpha} = 47{,}3$ $V' = 17{,}6$, red. **18,04**
$a = 1{,}0$ $\bar{\alpha} = 175{,}0$ $V' = 30{,}8$, red. **31,57.**

$e_0 = 42{,}0$ mm.
Bar. 736 mm, Temp. 22°.

$a = 0{,}5$ $\bar{\alpha} = 24{,}1$ $V' = 17{,}77$, red. **18,22**
$a = 1{,}0$ $\bar{\alpha} = 76{,}74$ $V' = 30{,}8$, red. **31,57.**

Bar. 738 mm, Temp. 20°.

$a = 1{,}0$ $\bar{\alpha} = 78{,}7$ $V' = 31{,}12$, red. **31,62**
$a = 1{,}5$ $\bar{\alpha} = 173{,}4$ $V' = 43{,}7$, red. **44,35.**

$e_0 = 58{,}7$ mm.
Bar. 738 mm, Temp. 20°.

$a = 1{,}0$ $\bar{\alpha} = 37{,}1$ $V' = 31{,}35$, red. **31,82**
$a = 1{,}5$ $\bar{\alpha} = 74{,}3$ $V' = 43{,}75$, red. **44,4**
$a = 2{,}0$ $\bar{\alpha} = 125{,}7$ $V' = 55{,}8$, red. **56,6.**

Durch Vergleichung dieser Werthe V' mit den oben mitgetheilten V erhält man nun folgende Werthe des Factors f, mit welchem die aus den Elektrometerausschlägen nach den Formeln 16) und 17) berechneten Werthe V' zu multipliciren sind, um die wirklichen Potentiale V zu liefern:

für $e^0 =$ ca. 25 mm $f =$ **0,973**
„ $e^0 = 30$ bis 31 mm $f = 0{,}957$ und 0,947; Mittel **0,952**
„ $e^0 =$ ca. 42 mm $f = 0{,}947$, 0,946, 0,9475; Mittel **0,947**
„ $e^0 =$ ca. 59 mm $f = 0{,}947$, 0,944, 0,938; Mittel **0,943.**

Diese Factoren sind immer zur Berechnung der bei den elektrooptischen Beobachtungen angegebenen Potentialwerthe V, soweit sie durch Elektrometerbeobachtungen und nicht direct durch Schlagweiten bestimmt wurden, benutzt worden.

Bei dem Kugelabstande $e^0 = 31{,}6$ war gleich nach Herstellung des Elektrometers eine grössere Reihe von Entladungspotentialmessungen ausgeführt worden, deren Resultate hier im Vergleich mit den nach Heydweiller's Zahlen interpolirten Werthen V und den betreffenden Verhältnissen $\frac{V}{V'} = f$ noch mitgetheilt werden mögen, obgleich der damalige Luftzustand nicht notirt worden war.

a	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
V'	18,05	19,5	20,7	21,9	23,5	24,7	26,0	27,0	28,4	30,0	31,5
V	17,23	18,56	19,78	21,05	22,32	23,59	24,84	25,10	27,35	28,60	29,85
f	0,956	0,956	0,956	0,962	0,952	0,955	0,956	0,965	0,962	0,954	0,948

Mittel $f =$ **0,956.**

Eine grössere Anzahl von Messungen bei $e^0 = 22{,}8$, $a = 0{,}5$ und $e^0 = 40{,}4$, $a = 1{,}0$, welche in Verbindung mit den später mitzutheilenden optischen Beobachtungen am Quarz ausgeführt wurden, ergaben im Durchschnitt $V' = 17{,}8$ bezw. $31{,}3$, entsprechend $f = 0{,}969$ bezw. $0{,}953$, welche Zahlen mit den oben für $e^0 = 24{,}8$ bezw. $42{,}0$ mm ermittelten ebenfalls gut übereinstimmen.

Es sei schliesslich noch eine erst nachträglich bemerkte Fehlerquelle erwähnt, welche die bei der zweiten Aufstellung des Elektrometers ausgeführten Messungen möglicherweise etwas beeinflusst hat, darin bestehend, dass drei Seidenfäden, welche zum Festhalten des Zuleitungsdrahtes der Kugel A zwischen diesem und den Kastenwänden ausgespannt worden waren, eine schwache elektrische Ladung annahmen, wenn die Kugel längere Zeit gleichsinnig geladen wurde. Diese sich erst allmählich einstellende Elektrisirung der Fäden bewirkte, dass der einem bestimmten Potential entsprechende Elektrometerausschlag mit jeder folgenden Ladung bis zu einer gewissen Grenze zunahm und nach Umkehrung des Ladungssinnes zunächst unter seinen normalen Werth sank, um dann wieder allmählich über denselben hinaus zu wachsen. Naturgemäss war aber dieser Einfluss gering, wenn der Ladungssinn oft gewechselt wurde, wie es bei den elektrooptischen Beobachtungen stets geschah; doch wurden auch dann noch die grösseren Entladungspotentiale (für $a = 1{,}0$, $1{,}5$ und $2{,}0$) bis zu 2 Proc. grösser gefunden, als die S. 26 mitgetheilten, nach Beseitigung der Seidenfäden bestimmten Werthe. Wenn also die Potentiale V', welche bei der zweiten Elektrometeraufstellung (bei den Beobachtungen am Natriumchlorat und einigen am Seignettesalz) erhalten wurden, mit den S. 26 ermittelten Correctionsfactoren multiplicirt werden, so sind die so gewonnenen Potentialwerthe V möglicherweise noch um einige Procente zu gross; doch kommt dieser Fehler bei der Ungenauigkeit der betreffenden optischen Messungen kaum in Betracht. —

Optisches Elektrometer.

Nachdem die elektrooptischen Beobachtungen am Quarz ergeben hatten, dass die Aenderung der Doppelbrechung durch dielektrische Polarisation sehr regelmässig und exact verläuft und stark genug ist, um mit dem Compensator genau gemessen werden zu können, wurde die eine der benutzten Quarzplatten, für welche die Aenderung des Gangunterschiedes am grössten war, bei einem Theil der späteren Beobachtungen am Seignettesalz geradezu als Elektrometer benutzt. Es war dies die bei Besprechung der Beobachtungen am Quarz als No. 1 bezeichnete grosse Platte, bei der die Elektrisirungsrichtung eine polare Nebenaxe und die Beobachtungsrichtung zu letzterer und zur Hauptaxe senkrecht war. Die Anordnung war bei der Verwendung der Platte als Elektrometer im Wesentlichen die gleiche, wie bei den später zu beschreibenden Compensator-Beobachtungen. Der Gangunterschied war durch eine zweite in den Weg der Lichtstrahlen eingeschaltete schmalere Quarzplatte von gleicher Länge (etwa 4,7 cm) mit vertikal gestellter Hauptaxe soweit compensirt, dass mit weissem Licht operirt werden konnte; zur Beobachtung seiner Aenderung durch die zu messende

elektrische Potentialdifferenz diente ein kleiner besonders für diesen Apparat construirter Babinet'scher Compensator. Die erste Quarzplatte (Q in nebenstehender Figur, welche in ca. $\frac{1}{2}$ natürlicher Grösse den zur Richtung der einfallenden Lichtstrahlen parallelen Vertikal-Durchschnitt des vom Mechaniker Diederichs in Göttingen construirten Apparates darstellt) lag zwischen zwei etwas kleineren Messingplatten M, M', die in der Mitte dicke Drähte mit Kugelklemmen (K, K') trugen; zum Schutze gegen das Ueberspringen von Funken zwischen M und M' waren oben und unten auf den Rand der Quarzplatte zwei Glimmerrahmen aufgekittet. Die ganze Plattencombination ruhte auf einer Hartgummiplatte $H\,H$, so dass sowohl die obere als die untere Belegung auf das zu messende Potential geladen werden konnte, während die andere zur Erde abgeleitet war. Die Platte H trug zugleich die mittelst kleiner Stellschrauben justirbare Compensationsplatte Q', sowie mittelst angeschraubter Messingarme den Compensator C nebst polarisirendem Nicol P und das analysirende Nicol'sche Prisma A, beide mit Theilkreisen versehen und letzteres verschiebbar, um in die Entfernung der deutlichen Sehweite vom Compensator gebracht werden zu können.

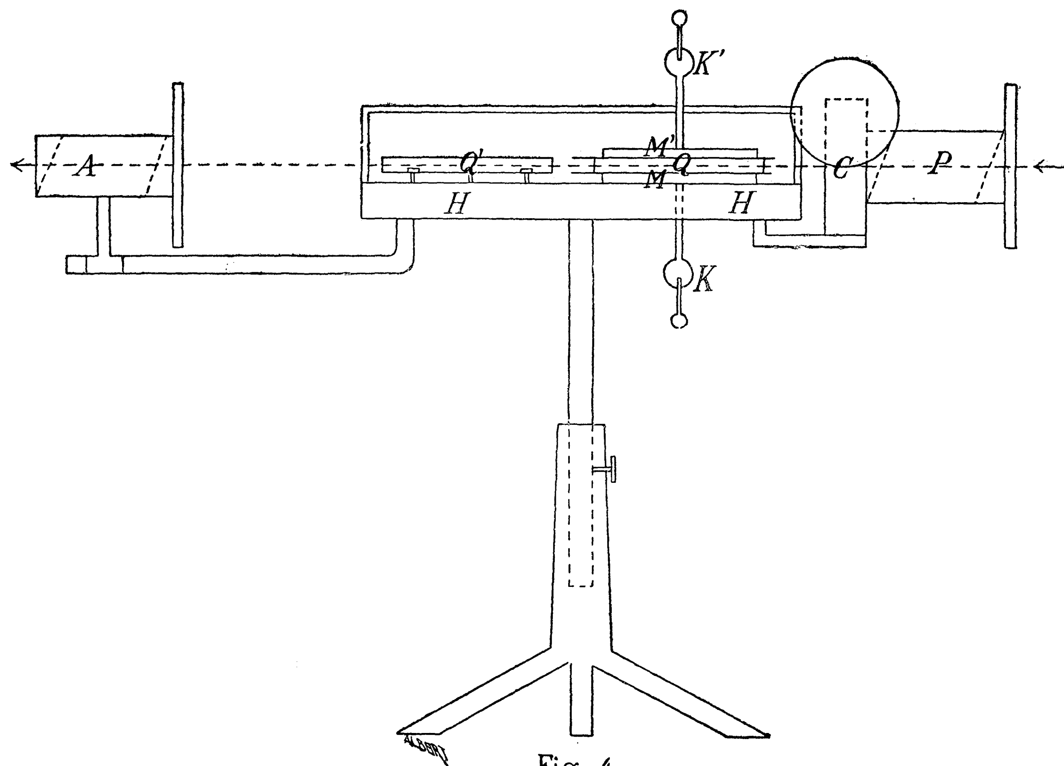


Fig. 4.

Da die Belegungen $M\,M'$ der Breitseiten der Platte Q etwas kleiner waren als die Plattenoberflächen, so konnte das einer bestimmten Aenderung des Gang-

unterschiedes entsprechende Potential nicht aus der zuvor bestimmten elektrooptischen Constante e_{11} des Quarzes berechnet werden, sondern musste direct durch Beobachtung des Gangunterschiedes für bestimmte Entladungspotentiale ermittelt werden. Es wurde so im Mittel aus einer grösseren Reihe von Beobachtungen gefunden, dass eine Drehung der Compensatorschraube um 1 Trommeltheil einer Potentialänderung von 0,190 absoluten Einheiten entsprach. Die Genauigkeit der einzelnen Einstellung betrug etwa 1 Trommeltheil; doch musste erst Temperaturgleichgewicht in den beiden Quarzplatten eingetreten sein, da sich andernfalls in Folge der Abhängigkeit der Doppelbrechung von der Temperatur die Nullstellung des Streifens stark verschob.

II. Theil.

Natriumchlorat.

Das Natriumchlorat, $NaClO_3$, krystallisirt aus wässeriger Lösung in schönen würfelförmigen Krystallen, an welchen häufig auch die Flächen des Rhombendodekaëders, eines Tetraëders und Pentagondodekaëders auftreten. Durch das Zusammenvorkommen der beiden letzteren erweisen sich die Krystalle als der Tetartoëdrie des regulären Systems angehörig, und damit steht auch ihre Eigenschaft, die Polarisationsebene des Lichtes, wie active isotrope Körper, zu drehen, in Einklang. Rechte und linke Krystalle finden sich meist in derselben Krystallisation nebeneinander.

Diesen Symmetrieverhältnissen gemäss ist zu erwarten, dass die Krystalle des $NaClO_3$ piëzoelektrisch erregbar sein und im elektrischen Felde optische Aenderungen erleiden müssen. Das Vorhandensein der Piëzo- und Pyroelektricität bei ihnen ist in der That schon länger bekannt[1]), und neuerdings sind diese Eigenschaften von den Herren Hankel und Lindenberg[2]) eingehender untersucht worden, jedoch nur nach der von ersterem Forscher schon vielfach angewandten Methode, welche keine quantitativen Resultate zu liefern vermag. Es sei daher von den Ergebnissen jener Untersuchung nur erwähnt, dass an würfelförmigen Krystallen, welche längs einer Diagonale gepresst wurden, dasjenige Ende dieser Diagonale, an welchem eine Tetraëderfläche lag, positiv elektrisch wurde, an tetraëdrischen Krystallen dagegen umgekehrt die Ecke, auf welche der Druck ausgeübt wurde. Das letztere Verhalten stimmt mit den Angaben von J. und P. Curie überein[3]).

Ueber das Verhalten des $NaClO_3$ bei dielektrischer Polarisation liegen bisher keinerlei Beobachtungen vor, ebensowenig über die Aenderung seiner optischen Eigenschaften durch Druck.

---

1) J. u. P. Curie, Compt. rend. **91**, 294, 383. 1880.
2) Elektrische Untersuchungen XIX, Abhandl. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. **18**, 361—405. 1892.
3) J. u. P. Curie, l. c. p. 384.

Das natürliche Drehungsvermögen ist von Hrn. Sohncke[1]) eingehend untersucht worden; die Resultate für verschiedene Farben sind folgende:

Spectrallinie:	C	D	E	F	G
Spec. Drehungsvermögen:	2,52°	3,16°	3,96°	4,61°	5,89°.

Der Brechungsindex für Na-Licht hat nach Dussaud[2]) den Werth 1,51510.

§ 1. Allgemeine Formeln.

Wählt man zu Coordinatenaxen X^0, Y^0, Z^0 die Würfelnormalen und berücksichtigt, dass dieselben in der tetartoëdrischen Gruppe des regulären Systems drei gleichwerthige zweizählige Symmetrieaxen sind, so nimmt der allgemeine Ansatz 6) folgende einfache Form an:

$$\text{19)}\quad \begin{gathered} B_{11} - \omega^{0^2} = B_{22} - \omega^{0^2} = B_{33} - \omega^{0^2} = 0, \\ B_{23} = e_{41} a, \; B_{31} = e_{41} b, \; B_{12} = e_{41} c. \end{gathered}$$

Die durch die dielektrische Polarisation a, b, c hervorgerufene Doppelbrechung ist also bestimmt durch das Ovaloid

$$\varrho^2 = \omega^{0^2} + 2e_{41}(a\nu^0\pi^0 + b\pi^0\mu^0 + c\mu^0\nu^0),$$

und die Gleichungen 3) und 4) zur Bestimmung der Hauptaxen desselben nehmen die specielle Form an:

$$\text{20)}\quad \left| \begin{aligned} a(\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2) + b(\beta_3\gamma_1 + \beta_1\gamma_3) + c(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) &= 0 \\ a(\gamma_2\alpha_3 + \gamma_3\alpha_2) + b(\gamma_3\alpha_1 + \gamma_1\alpha_3) + c(\gamma_1\alpha_2 + \gamma_2\alpha_1) &= 0 \\ a(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) + b(\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3) + c(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\text{21)}\quad \left| \begin{aligned} \omega_x^2 &= \omega_0^2 + 2e_{41}(a\alpha_2\alpha_3 + b\alpha_3\alpha_1 + c\alpha_1\alpha_2) \\ \omega_y^2 &= \omega_0^2 + 2e_{41}(a\beta_2\beta_3 + b\beta_3\beta_1 + c\beta_1\beta_2) \\ \omega_z^2 &= \omega_0^2 + 2e_{41}(a\gamma_2\gamma_3 + b\gamma_3\gamma_1 + c\gamma_1\gamma_2). \end{aligned} \right.$$

Dies gilt im Falle, dass keine Circularpolarisation vorhanden ist. Wenn der Krystall ursprünglich circularpolarisirend ist, sodass sich also in jeder Richtung eine rechts- und eine linksrotirende circulare Schwingung mit verschiedenen Geschwindigkeiten ω_r^0 und ω_l^0 fortpflanzen, so kann man aus der zuvor für fehlende Circularpolarisation bestimmten Doppelbrechung das wirklich eintretende optische Verhalten leicht berechnen, sofern man annimmt, dass sich die Kräfte, welche die Circularpolarisation bedingen, denjenigen, welche bei der reinen Doppelbrechung wirksam wären, einfach superponiren. Unter dieser naheliegenden

1) L. Sohncke, Wied. Ann. **3**, 516. 1878.

2) F. Dussaud, La réfraction et dispersion du chlorate de soude cristallisé. Dissertation. Genf 1892.

Voraussetzung, welche auch in fast allen optischen Theorien[1]) gemacht wird, welche für das Verhalten activer krystallinischer Medien aufgestellt worden sind, ergiebt sich, dass sich in jeder Richtung im Allgemeinen zwei elliptisch polarisirte Wellen fortpflanzen mit Geschwindigkeiten ω_l, ω_r, die gegeben sind durch

$$22)\qquad \left.\begin{matrix}\omega_l^2\\ \omega_r^2\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}(\omega_1^2+\omega_2^2) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2+(\omega_l^{0^2}-\omega_r^{0^2})^2}.$$

Darin bezeichnen ω_1, ω_2 die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, welche für die betreffende Richtung gelten würden, wenn keine Circularpolarisation vorhanden wäre, und welche in gewöhnlicher Weise aus dem Ovaloid abzuleiten sind. Wird in 22) immer der absolute Werth der Quadratwurzel genommen, so gilt das obere Vorzeichen für ω_l, das untere für ω_r im Falle eines linken Krystalles, umgekehrt im Falle eines rechten. Ferner ergiebt sich folgender Ausdruck für das Axenverhältniss der Schwingungsellipse der links rotirenden Welle:

$$23)\qquad \varkappa_1 = \frac{\omega_l^2-\omega_1^2}{\omega_l^2-\omega_2^2} = \frac{\sqrt{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2+(\omega_l^{0^2}-\omega_r^{0^2})^2}-(\omega_1^2-\omega_2^2)}{\sqrt{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2+(\omega_l^{0^2}-\omega_r^{0^2})^2}+(\omega_1^2-\omega_2^2)}.$$

Das Axenverhältniss für die rechts rotirende Welle ist der reciproke Werth des vorstehenden, d. h. die beiden Schwingungsellipsen sind einander ähnlich und haben gekreuzt liegende grosse Axen, welche in diejenigen Richtungen fallen, welche bei fehlendem Drehungsvermögen die Schwingungsrichtungen sein würden.

Die Formeln 22) und 23) reichen aus zur Berechnung aller im polarisirten Lichte in zugleich optisch activen und doppeltbrechenden Krystallen zu beobachtenden Erscheinungen, und soweit die aus ihnen gezogenen Folgerungen bisher durch die Beobachtungen geprüft worden sind, was am natürlichen Quarz in eingehender Weise, u. A. von Hrn. B. Hecht[2]), und am durch seitlichen Druck optisch zweiaxig gemachten Quarz von F. Beaulard[3]) und Monnory[4]) geschehen ist, wurden sie gut bestätigt gefunden. Da ausserdem die den Formeln zu Grunde liegende Voraussetzung einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit besitzt, so kann man dieselben ohne Bedenken zum Ausgangspunkt der weiteren Rechnung nehmen.

Es ist danach ersichtlich, dass es zunächst darauf ankommt, die Lichtgeschwindigkeiten zu berechnen, welche bei Abwesenheit der Activität stattfinden würden; ausserdem muss natürlich die Stärke der Circularpolarisation, also $\omega_r^{0^2}-\omega_l^{0^2}$, gegeben sein.

---

1) Vergl. z. B. W. Voigt, Wied. Ann. **19**, 899. 1883. Auch die Untersuchung von Gouy (Journ. de phys. (2) **4**, 149. 1885) kommt auf dasselbe hinaus und führt zu den obigen Formeln.

2) B. Hecht, Wied. Ann. **20**, 426. 1883; **30**, 274. 1887.

3) Beaulard, Compt. rend. **111**, 173. 1890. **112**, 1503. 1891. Journ. de phys. (3) **2**, 393—407, 459—478. 1893.

4) Monnory, Compt. rend. **112**, 428. 1891.

Im vorliegenden Falle des durch Einwirkung der dielektrischen Polarisation doppeltbrechend gemachten Natriumchlorats sind also ω_1, ω_2 und die Hauptaxenrichtungen der Schwingungsellipsen in der gewöhnlichen Weise mit Hülfe des durch die Formeln 19), 20), 21) gegebenen Ovaloids zu bestimmen; nur ist noch die Bedeutung von ω^0 in jenen Formeln dahin zu präcisiren, dass darunter der Mittelwerth aus ω_r^0 und ω_l^0, die sich übrigens nur äusserst wenig unterscheiden, zu verstehen ist.

In analoger Weise ist zur theoretischen Untersuchung der durch elastische Deformationen verursachten Aenderungen des optischen Verhaltens — das $NaClO_3$ wird durch dieselben im Allgemeinen optisch zweiaxig mit elliptischer Polarisation — zunächst der Ansatz zu benutzen, welcher für nicht active reguläre Krystalle (aller 5 Gruppen) gilt, nämlich:

24)
$$\left|\begin{aligned} B_{11}-\omega_0^2 &= a_{11}x_x+a_{12}(y_y+z_z)\\ B_{22}-\omega_0^2 &= a_{11}y_y+a_{12}(z_z+x_x)\\ B_{33}-\omega_0^2 &= a_{11}z_z+a_{12}(x_x+y_y)\\ B_{23} &= a_{44}y_z\\ B_{31} &= a_{44}z_x\\ B_{12} &= a_{44}x_y. \end{aligned}\right.$$

Der Ansatz 7) der Voigt'schen Theorie für die piëzoelektrische Erregung nimmt für regulär-tetartoëdrische Krystalle, ebenfalls bezogen auf die Würfelnormalen als Coordinatenaxen, die sehr einfache Form an:

25)
$$a = -\delta_{14}Y_z, \qquad b = -\delta_{14}Z_x, \qquad c = -\delta_{14}X_y,$$

enthält also nur eine Constante, wie die Formeln 19).

Dementsprechend sind zufolge 8), worin noch $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3 = \varkappa$ wird, die Deformationen im elektrischen Felde gegeben durch

26)
$$x_x = y_y = z_z = 0,$$
$$y_z = \frac{\delta_{14}}{\varkappa}a, \qquad z_x = \frac{\delta_{14}}{\varkappa}b, \qquad x_y = \frac{\delta_{14}}{\varkappa}c.$$

Schliesslich reduciren sich auch die Constanten e'_{mn} der Gleichungen 6') auf eine einzige $e'_{41} = e'_{52} = e'_{63}$, welche nach 9) mit δ_{14} und a_{44} durch nachstehende Relation zusammenhängt:

27)
$$e'_{41}\cdot\varkappa = a_{44}\delta_{14}.$$

Um die im § 1 des I. Theils aufgeworfene Frage zu entscheiden, kommt es demnach beim Natriumchlorat darauf an, die elektrooptische Constante e_{41}, die piëzoelektrische δ_{14}, und die eine piëzooptische Constante a_{44} experimentell zu bestimmen. In welcher Weise dies geschehen kann und ausgeführt worden ist, soll in den folgenden Paragraphen erörtert werden.

§ 2. Theorie der beobachteten elektrooptischen Erscheinungen.

a. Bestimmung des Ovaloids für specielle Richtungen des Momentes.

Es soll jetzt die Doppelbrechung, wie sie ohne Circularpolarisation eintreten würde, für die Fälle untersucht werden, dass die elektrischen Kraftlinien, mit welchen bei regulären Krystallen die Richtung des inducirten Momentes zusammenfällt, entweder einer Fläche des Würfels oder einer des Rhombendodekaëders parallel sind. Bei den Beobachtungen hatten dieselben zwar nur die noch specielleren Richtungen einer Würfel-, Dodekaëder- und Octaëdernormale; aber um den Zusammenhang der Erscheinungen übersehen zu können, empfiehlt es sich, die Richtung innerhalb einer der bezeichneten Ebenen zunächst beliebig zu lassen.

I. Die Kraftlinien liegen parallel einer Würfelfläche — der X^0Y^0-Ebene — und bilden mit der X^0-Axe den Winkel Φ, positiv gerechnet gegen die $+Y^0$-Axe hin.

Dann ist

$$a = m\cos\Phi, \qquad b = m\sin\Phi, \qquad c = 0,$$

wenn m das inducirte Gesammtmoment $= -\varkappa\frac{\partial V}{\partial n}$ bezeichnet.

Die Gleichungen 20) werden daher

$$20')\quad \left| \begin{array}{l} \gamma_3(\beta_2\cos\Phi+\beta_1\sin\Phi)+\beta_3(\gamma_2\cos\Phi+\gamma_1\sin\Phi) = 0, \\ \gamma_3(\alpha_2\cos\Phi+\alpha_1\sin\Phi)+\alpha_3(\gamma_2\cos\Phi+\gamma_1\sin\Phi) = 0, \\ \alpha_3(\beta_2\cos\Phi+\beta_1\sin\Phi)+\beta_3(\alpha_2\cos\Phi+\alpha_1\sin\Phi) = 0, \end{array}\right.$$

und es wird ihnen genügt durch

$$28)\quad \left| \begin{array}{l} \alpha_1 = \cos\Phi, \quad \alpha_2 = -\sin\Phi, \quad \alpha_3 = 0, \\ \beta_1 = \gamma_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\sin\Phi, \\ \beta_2 = \gamma_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\cos\Phi, \\ \beta_3 = -\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \quad \gamma_3 = +\sqrt{\tfrac{1}{2}}. \end{array}\right.$$

Diese Werthe der Richtungscosinus lehren, dass eine der optischen Symmetrieaxen, — hier die zur X-Axe gewählte —, ebenfalls in der X^0Y^0-Ebene liegt und zwar in Bezug auf die X^0-Axe symmetrisch zur Richtung des Momentes m, und ferner, dass die beiden anderen Symmetrieaxen (Y, Z) symmetrisch (also unter 45^0 geneigt) zu beiden Seiten der X^0Y^0-Ebene liegen. (Vergl. nebenstehende Figur). Dies gilt, wie immer bei regulären Krystallen, ganz unabhängig von der Grösse des Momentes.

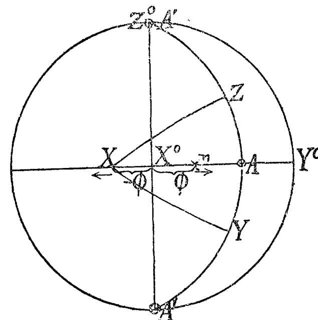


Fig. 5.

Die Gleichungen 21) geben nach Einsetzen

der Werthe $a = m \cos \Phi$, $b = m \sin \Phi$, $c = 0$ und derjenigen von $\alpha_1 \dots \gamma_3$ aus 28):

$$29)\quad \left| \begin{aligned} \omega_x^2 &= \omega^{0^2}, \\ \omega_y^2 &= \omega^{0^2} - e_{41}\, m, \\ \omega_z^2 &= \omega^{0^2} + e_{41}\, m. \end{aligned} \right.$$

Demnach ändern sich die Hauptlichtgeschwindigkeiten nicht, wenn sich das Moment m bei constant bleibender Grösse in der $X^0 Y^0$-Ebene dreht; immer ist der Krystall optisch zweiaxig, und zwar die Ebene der optischen Axen (A, A' in Fig. 5) die YZ-Ebene, d. h. senkrecht zur $X^0 Y^0$-Ebene, und der Winkel zwischen den optischen Axen ist stets gleich 90^0. Dieses merkwürdige Verhalten lässt sich auch so beschreiben: Liegt das Moment parallel einer Würfelfläche, so ist die eine optische Axe stets senkrecht zu dieser Würfelfläche, während die andere parallel der letzteren liegt und zwar zur Richtung des Momentes symmetrisch in Bezug auf eine zu jener Würfelfläche senkrechte Rhombendodekaëderfläche.

Wir wollen nun dem Moment diejenigen speciellen Richtungen beilegen, welche es bei den später zu besprechenden Beobachtungen besass.

Ia. Das Moment fällt in eine Würfelnormale, z. B. X^0; es ist $\Phi = 0$.

Dann sind dem obigen allgemeinen Satz zufolge die optischen Axen die beiden anderen Würfelnormalen.

Demnach muss die stärkste Doppelbrechung, entsprechend der Differenz $\omega_z^2 - \omega_y^2 = 2 e_{41} m$, in der Richtung der Kraftlinien zu beobachten sein, halb so starke in der Richtung der zu letzteren senkrechten Dodekaëdernormalen, und gar keine in der Richtung der beiden anderen Würfelnormalen.

Die Schwingungsrichtungen (eigentlich die grossen Axen der Schwingungsellipsen) müssen bei Beobachtung parallel den Kraftlinien in die zu letzteren senkrechten Dodekaëdernormalen (also die Diagonalen der betrachteten Würfelfläche) fallen, bei Beobachtung in irgend einer Richtung senkrecht zu den Kraftlinien aber parallel bezw. senkrecht zu diesen letzteren sein.

Ib. Das Moment hat die Richtung einer Dodekaëdernormale, also etwa der Halbirungslinie des Winkels (X^0, Y^0), für welche $\Phi = 45^0$ ist.

Die eine optische Axe ist wie zuvor parallel Z^0, die andere aber parallel den Kraftlinien. Es kann demnach weder bei Beobachtung in der Richtung der Kraftlinien, noch auf der zu den letzteren parallelen Würfelfläche eine elektrooptische Wirkung zu beobachten sein. Das Maximum der Doppelbrechung, wiederum gegeben durch $2 e_{41} m$, findet statt parallel der zu den Kraftlinien senkrechten Dodekaëdernormale, der Halbirungslinie des Winkels (X^0, $-Y^0$); die entsprechenden Schwingungsrichtungen bilden die Winkel $\pm 45^0$ mit den Kraftlinien.

II. Die Kraftlinien sind parallel einer Dodekaëderfläche — wir wollen annehmen der Halbirungsebene des Winkels zwischen der $Z^0 X^0$-

und Z^0Y^0-Ebene. Der Winkel, welchen sie mit der Z^0-Axe bilden, positiv gerechnet im ersten Octanten, werde mit Θ bezeichnet; dann ist

$$a = b = m\sqrt{\tfrac{1}{2}}\sin\Theta, \qquad c = m\cos\Theta.$$

Man genügt den beiden letzten der Gleichungen 20) identisch, wenn man setzt:

30)
$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\alpha_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, & \alpha_3 &= 0, \\ \beta_1 &= \beta_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\cos\vartheta, & \beta_3 &= -\sin\vartheta, \\ \gamma_1 &= \gamma_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\sin\vartheta, & \gamma_3 &= \cos\vartheta. \end{aligned}$$

Damit dann auch die erste Gl. 20) erfüllt sei, muss ϑ der Relation genügen

$$\sin\Theta\cos 2\vartheta + \tfrac{1}{2}\cos\Theta\sin 2\vartheta = 0$$

oder

30′)
$$\operatorname{tg} 2\vartheta = -2\operatorname{tg}\Theta.$$

Hiernach ist

$$\text{für } 0 < \Theta < 54^0\,44' < \Theta < 90^0$$
$$90^0 > \vartheta > 54^0\,44' > \vartheta > 45^0,$$

d. h. wenn die Momentrichtung m sich von der Z^0-Axe aus gegen die X^0Y^0-Ebene hin dreht, so bewegt sich die optische Symmetrieaxe Z, welche immer mit Z^0 und m in derselben Ebene liegt, umgekehrt aus der X^0Y^0-Ebene gegen Z^0 hin, erreicht aber dabei nur die Halbirungslinie des von m durchlaufenen Quadranten. In der Octaëdernormale (für $\Theta = 54^0\,44'$) fallen die Richtungen von m und Z zusammen. Da $\alpha_3 = 0$ und $\alpha_1 = -\alpha_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ ist, so ist die optische Symmetrieaxe X stets senkrecht zu der von m durchlaufenen Dodekaëderebene, und die letztere also eine optische Symmetrieebene. (Vgl. Figur 6).

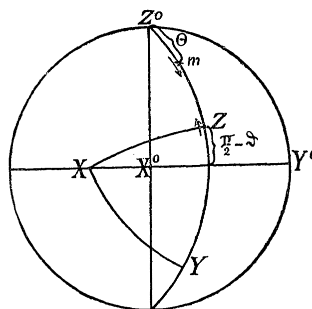


Fig. 6.

Die Gleichungen 21) werden jetzt:

31)
$$\left|\begin{aligned} \omega_x^2 &= \omega^{0^2} - m\,e_{41}\cos\Theta, \\ \omega_y^2 &= \omega^{0^2} + m\,e_{41}(\cos\Theta\cos^2\vartheta - \sin\Theta\sin 2\vartheta), \\ \omega_z^2 &= \omega^{0^2} + m\,e_{41}(\cos\Theta\sin^2\vartheta + \sin\Theta\sin 2\vartheta). \end{aligned}\right.$$

Daraus ist ersichtlich, dass der Krystall ebenfalls im Allgemeinen optisch zweiaxig wird, jedoch mit einem Axenwinkel und Differenzen der Hauptlichtgeschwindigkeiten, die mit der Richtung des Momentes variiren. Die Ebene der optischen Axen ist senkrecht zu der das Moment enthaltenden Dodekaëderebene, solange $\Theta < 54^0\,44'$ ist, dagegen parallel derselben für $\Theta > 54^0\,44'$. Wenn $\Theta = 54^0\,44'$ wird, d. h. das Moment in die Richtung der Octaëdernormale

fällt — welcher Fall gerade für die Beobachtungen in Betracht kommt —, so wird $\vartheta = \Theta$, $\cos\Theta = \sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sin\Theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sin 2\vartheta = \frac{2}{3}\sqrt{2}$, folglich

$$31') \quad \left| \begin{aligned} \omega_x^2 = \omega_y^2 &= \omega^{0^2} - \frac{m}{\sqrt{3}} e_{41}, \\ \omega_z^2 &= \omega^{0^2} + 2\frac{m}{\sqrt{3}} e_{41}; \end{aligned} \right.$$

somit wird dann der Krystall optisch einaxig mit einer durch

$$\omega_z^2 - \omega_x^2 = \sqrt{3} \cdot m e_{41}$$

gegebenen Stärke der Doppelbrechung und natürlich mit zu den Kraftlinien paralleler optischer Axe. —

Die nach dem Vorhergehenden sich ergebende Lage der Schwingungsrichtungen für verschiedene Fortpflanzungsrichtungen bei den drei betrachteten Lagen des Momentes — parallel einer Würfel-, Dodekaëder- und Octaëdernormale — liefert bereits eine gute Prüfung der allgemeinen, d. h. lediglich auf den Ansatz 19) begründeten Theorie. Infolge des Drehungsvermögens des Natriumchlorats haben diese Schwingungsrichtungen hier aber thatsächlich die Bedeutung der Hauptaxen der Schwingungsellipsen, und es fragt sich daher, wie dieselben durch Beobachtungen ermittelt werden können. Mit dieser Aufgabe wollen wir uns im folgenden Abschnitt (b) beschäftigen. Die Bezeichnung „Schwingungsrichtungen" wollen wir der Kürze wegen beibehalten, da ja nach der vorhergehenden Erörterung kein Zweifel entstehen kann, was damit gemeint ist.

b. Bestimmung der Schwingungsrichtungen.

Lässt man durch eine ursprünglich optisch isotrope, circularpolarisirende Krystallplatte polarisirtes homogenes Licht hindurchgehen und beobachtet durch einen Analysator, den man so gestellt hat, dass er das austretende Licht gerade auslöscht, so wird, wenn man nun die Platte durch äussere Einwirkung anisotrop, also elliptisch polarisirend macht, eine Aufhellung der Platte eintreten, welche auch durch keinerlei Drehung des Analysators und Polarisators ganz wieder zum Verschwinden zu bringen ist. Es giebt aber gewisse Stellungen der letzteren, für welche die Aufhellung ein Minimum wird, und die Aufsuchung dieser Stellungen der Nicols kann dazu dienen, die Hauptaxenrichtungen der Schwingungsellipsen („Schwingungsrichtungen") der beiden sich in der Beobachtungsrichtung im Krystall fortpflanzenden Wellen zu ermitteln. Um zu sehen, wie dies möglich ist, hat man die Intensität des aus dem Analysator austretenden Lichtes zunächst unter der Annahme zu berechnen, dass die Nicolhauptschnitte gegen die Schwingungsrichtungen ξ, η des Krystalls beliebig stehen, unter einander aber denjenigen Winkel bilden, für welchen bei isotroper Krystallplatte Auslöschung stattfindet, also den Winkel $L\frac{\delta^0}{2}$, falls L die Dicke der

Platte in der Beobachtungsrichtung, $\frac{\delta^0}{2}$ ihr specifisches Drehungsvermögen — positiv gerechnet als Linksdrehung — für die benutzte Lichtsorte bezeichnet. Sodann ist zu untersuchen, wie man die Krystallplatte gegen die Nicols, oder, der Anordnung bei den Versuchen entsprechend, die Nicols unter Beibehaltung ihrer gegenseitigen Stellung gegen den Krystall zu drehen hat, damit die Intensität bei gegebener Stärke der Doppelbrechung ein Minimum wird.

Es seien ψ und i die Winkel, welche die Schwingungsebenen im Analysator und Polarisator mit der Schwingungsrichtung ξ bilden, positiv gerechnet entgegen dem Sinne des Uhrzeigers; dann ist zufolge der obigen Festsetzung über ihre gegenseitige Stellung

$$\psi = i + \frac{\pi}{2} + L\frac{\delta^0}{2}.$$

Wird das Verhältniss $\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_r^{0^2} - \omega_l^{0^2}}$, welches der Stärke der durch die äussere Einwirkung erzeugten Doppelbrechung proportional ist, mit x bezeichnet, so sind zufolge 23) die Axenverhältnisse der beiden Schwingungsellipsen $\varkappa_1 = \sqrt{1+x^2} - x$ und $\varkappa_2 = \sqrt{1+x^2} + x$, und ist nach 22) die Phasenverzögerung der rechts rotirenden Welle gegen die links rotirende gleich $L\delta^0\sqrt{1+x^2}$; letztere ist nämlich im Falle reiner Circularpolarisation $= L\delta^0$ und wird durch das Hinzukommen der Doppelbrechung zufolge der sich aus 22) ergebenden Gleichung

$$\omega_l^2 - \omega_r^2 = \pm\sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + (\omega_l^{0^2} - \omega_r^{0^2})^2}$$

im Verhältniss $\sqrt{1+x^2}$ vergrössert. — Eine elementare Rechnung ergiebt dann folgenden Ausdruck für die resultirende Intensität, worin A^2 einen constanten Factor bezeichnet:

$$\begin{aligned} J = A^2 \Big\{ \tfrac{1}{2} - \left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_1^2+1}\right)^2 \cos 2i \Big[&\cos(2i + L\delta^0)\cdot\left(2\cos(L\delta^0\sqrt{1+x^2}) + \tfrac{1}{2}(\varkappa_2-\varkappa_1)^2\right) \\ &+ \sin(2i+L\delta^0)\cdot(\varkappa_1+\varkappa_2)\sin(L\delta^0\sqrt{1+x^2})\Big] \\ + \left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_1^2+1}\right)^2 \sin 2i \Big[(\varkappa_2+\varkappa_1)&\cos(2i+L\delta^0)\sin(L\delta^0\sqrt{1+x^2}) - \tfrac{1}{2}(\varkappa_2+\varkappa_1)^2\sin(2i+L\delta^0)\cos(L\delta^0\sqrt{1+x^2})\Big]\Big\}. \end{aligned}$$

Die Bedingung dafür, dass J bei constantem x (und $\varkappa_1$, $\varkappa_2$) durch Aenderung von i ein Maximum oder Minimum wird, also $\frac{\partial J}{\partial i} = 0$, nimmt die einfache Form an

$$(\varkappa_2 - \varkappa_1)^2 \sin^2\left(\frac{L\delta^0}{2}\sqrt{1+x^2}\right)\cdot\sin(4i + L\delta^0) = 0.$$

Da für ein beliebiges, gegebenes x die Factoren $(\varkappa_2 - \varkappa_1)^2 = 4x^2$ und $\sin^2\frac{L\delta^0\sqrt{1+x^2}}{2}$ nicht verschwinden können, so muss sein

$$4i + L\delta^0 = n\pi,$$

$$i = -\frac{L\delta^0}{4} + n\frac{\pi}{4}, \qquad (n = 0, 1, 2, 3 \ldots).$$

Von diesen Werthen entsprechen diejenigen den Minimis von J, welche es für sehr kleines x thun würden, vorausgesetzt, dass $\frac{1}{2}L\delta^0\sqrt{1+x^2}$ noch $< \pi$ ist, welche Bedingung bei allen untersuchten Krystallen von Natriumchlorat erfüllt war. Durch Entwicklung des Ausdruckes für J nach Potenzen von x sieht man nun leicht, dass dies die Werthe $-\frac{L\delta^0}{4} + 2n\frac{\pi}{4}$ sind. Also treten die Minima der Intensität ein für die durch

32) $$i = -\frac{L\delta^0}{4} + n\frac{\pi}{2}, \qquad (n = 0, 1, 2, 3),$$

gegebenen Stellungen des Polarisators, wenn zugleich der Analysator auf

32′) $$\psi = +\frac{L\delta^0}{4} + (n+1)\frac{\pi}{2}$$

gestellt ist. Man erkennt hieraus, dass die Minimumstellungen diejenigen sind, bei welchen die Schwingungsebene des Polarisators und die zur Schwingungsebene des Analysators senkrechte Ebene symmetrisch zu einer der Schwingungsrichtungen des Krystalls liegen, indem sie mit letzterer die Winkel $\pm\frac{L\delta^0}{4}$ (gleich der halben ursprünglichen Drehung der Polarisationsebene) bilden. Hierdurch ist es möglich, die Schwingungsrichtungen auch ohne Kenntniss der Drehung $\frac{L\delta^0}{2}$ zu bestimmen: man braucht nämlich nur beide Nicols unabhängig von einander so zu drehen, dass die Intensität oder auch, da ja die Bedingung für das Minimum unabhängig von x ist, der Wechsel der Intensität bei variirendem x möglichst gering wird; dann sind die gesuchten Schwingungsrichtungen die Halbirungslinien der Winkel zwischen der Schwingungsrichtung des Polarisators und der Normalen zur Schwingungsrichtung des Analysators. Sind also i' und ψ' die in Bezug auf eine beliebige feste Richtung, etwa eine Krystallkante, gerechneten Azimuthe der Hauptschnitte des Polarisators und Analysators bei deren in der eben angegebenen Weise ausgeführten Einstellung, so sind die auf dieselbe feste Richtung bezogenen Azimuthe der Schwingungsrichtungen im Krystall zufolge 32) und 32′):

32″) $$\varphi = \frac{1}{2}\left(i' + \psi' - \frac{\pi}{2}\right) + n\frac{\pi}{2}.$$

Diese Bestimmungsmethode hat den grossen Vortheil, auch mit Anwendung von weissem Licht ausführbar zu sein. Die Minima treten zwar für die verschiedenen Farben bei verschiedenen Stellungen der Nicols ein; allein es giebt eine gewisse blau-violette Farbe — complementär zum intensivsten Gelb — bei

welcher die Intensitätsänderungen bei Weitem am deutlichsten wahrnehmbar sind. Man wird also die Nicols in eine solche gegenseitige Stellung bringen, dass die Platte in dieser empfindlichen Färbung erscheint, und dieselben dann beide so drehen, dass der bei wechselnder Doppelbrechung der Platte (also in wechselndem elektrischen Felde) eintretende Intensitäts- oder eigentlich Farbenwechsel möglichst schwach wird. Dabei ist es nun gar nicht wesentlich, dass man immer genau die gleiche Farbennuance wählt; denn die wie oben angegeben bestimmten Halbirungslinien der Winkel zwischen den Nicolhauptschnitten liefern immer — wenigstens mit grosser Annäherung — die Schwingungsrichtungen im Krystall, welche selbst ja für alle Farben gleiche Lage haben. Messungen, welche nach dieser Methode ausgeführt wurden, werden im nächsten § mitgetheilt werden. Es sei noch hervorgehoben, dass der Farbenwechsel bei denjenigen (von den zuvor bestimmten um 45^0 verschiedenen) Stellungen des Nicols, wo er am stärksten wird, die an sich sehr geringe elektrooptische Wirkung der dielektrischen Polarisation im Natriumchlorat ausserordentlich deutlich hervortreten lässt, so dass diese, unten in ihren Einzelheiten zu beschreibende Versuchsanordnung auch zur Demonstration wohl geeignet wäre.

Uebrigens ist die Dicke L der Platte von Einfluss auf die Deutlichkeit des Intensitäts- bezw. Farbenwechsels und besonders auf die Schärfe der Minima. Der für $i = -\frac{L\delta^0}{4} + n\frac{\pi}{2}$ eintretende Minimalwerth von J ist nämlich:

$$J_{Min} = A^2 \left\{ \sin\left[\frac{L\delta^0}{2}(1-\sqrt{1+x^2})\right] + \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}} \cos\frac{L\delta^0}{2} \sin\left[\frac{L\delta^0}{2}\sqrt{1+x^2}\right] \right\}^2,$$

also abhängig von $L\delta^0$ und zwar derart, dass er zunächst mit dieser Grösse wächst; solange x^2 sehr klein ist, kann man setzen

$$J_{Min} = \frac{A^2 x^4}{16} (\sin L\delta^0 - L\delta^0)^2.$$

Berechnet man ebenso den Maximalwerth von J, so findet man

$$J_{Max} : J_{Min} = 1 + \frac{16}{x^2}\left(\frac{\sin\frac{L\delta^0}{2}}{\sin L\delta^0 - L\delta^0}\right)^2.$$

Für kleines $L\delta^0$, also geringe Dicke L der Krystallplatte, ist das zweite Glied sehr gross, also auch der Unterschied zwischen dem Maximum und Minimum der Intensität oder des Intensitäts- (bezw. Farben-)Wechsels verhältnissmässig sehr gross; beim Minimum verschwindet dann die Wirkung so gut wie vollständig. Lässt man aber L wachsen, so nähert sich das obige Verhältniss mehr und mehr dem Werthe 1, den es erreicht für $\frac{L\delta^0}{2} = \pi$, was für gelbes Licht allerdings erst bei der Dicke L = ca. 57 mm eintreten würde. Vorstehende Ueberlegung lehrt, dass es bei der Bestimmung der Schwingungsrichtungen

nicht zweckmässig ist, sehr dicke Krystalle anzuwenden, was man wegen des mit der Dicke zunehmenden Gangunterschiedes zunächst vermuthen könnte. —

c. Bestimmung der Gangunterschiede mit dem Compensator.

Die Aenderung des Gangunterschiedes in einem elliptisch polarisirenden Krystall kann nicht unmittelbar am Compensator abgelesen werden, wie bei gewöhnlicher Doppelbrechung; es lässt sich aber eine Gleichung aufstellen, welche die Bestimmung der Grösse $x = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_r^{0^2} - \omega_l^{0^2}}$ aus Compensatorbeobachtungen gestattet. Dies soll für den Fall geschehen, dass die Krystallplatte in der Beobachtungsrichtung ursprünglich reine Circularpolarisation besitzt und also $\omega_1 - \omega_2$ die zu bestimmende Geschwindigkeitsdifferenz ist, welche in jener Richtung durch die äussere Einwirkung bei Abwesenheit des Drehungsvermögens erzeugt werden würde. Vorausgesetzt wird, dass die Polarisationsebene des einfallenden homogenen Lichtes unter 45^0 gegen die Schwingungsrichtungen im Krystall geneigt und der Analysator so gestellt sei, dass die Krystallplatte für sich allein ursprünglich ganz dunkel erscheint; ferner, dass der den Interferenzstreifen parallele Compensatorhauptschnitt zusammenfällt mit der Polarisationsrichtung der Welle von der Geschwindigkeit ω_1. Die Compensatorstreifen erscheinen bei dieser Anordnung ursprünglich ganz dunkel. Wird nun im Krystall durch die äussere Einwirkung — etwa dielektrische Polarisation — der zu bestimmende Gangunterschied hervorgebracht, so erleiden die Compensatorstreifen eine gewisse Verschiebung, verlieren aber gleichzeitig etwas an Schärfe, weil jetzt die Schwingungen im Krystall elliptisch mit den Axenverhältnissen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ geworden sind, und daher nirgends mehr vollständige Auslöschung des Lichtes stattfindet. Wenn die hervorgebrachten Aenderungen aber so klein sind, wie es praktisch stets der Fall war, so bleiben die Streifen dunkel genug, um eine gute Einstellung zu ermöglichen. Ist dann $\varDelta$ die Anzahl der Umdrehungen der Mikrometerschraube des Compensators, die man ausführen muss, um dessen Streifen in ihre Anfangslage zurückzuführen, also $\delta = 2\pi \frac{\varDelta}{23{,}8}$ die im Compensator hervorgebrachte Phasenverzögerung der parallel zu den Streifen (oder zum verschiebbaren Spalt) polarisirten Welle gegen die andere, so ergiebt sich die Beziehung zwischen δ und x bezw. $\omega_1^2 - \omega_2^2$ dadurch, dass man denjenigen Werth von δ berechnet, für welchen die Intensität des durch den Polarisator, Compensator, die elliptisch polarisirende Krystallplatte und den Analysator hindurchgegangenen Lichtes ein Minimum wird. Die Gleichung, zu welcher man so gelangt[1]), lautet:

33)
$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{23{,}8}\varDelta = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\left\{(1-\cos(L\delta^0\sqrt{1+x^2}))\sin L\delta^0 + \sqrt{1+x^2}\cdot\sin(L\delta^0\sqrt{1+x^2})\cos L\delta^0\right\}}{\left\{\sqrt{1+x^2}\cos(L\delta^0\sqrt{1+x^2})\cos L\delta^0 + \sin(L\delta^0\sqrt{1+x^2})\sin L\delta^0\right\}}.$$

1) Wegen der Ableitung vergl. F. Pockels, Wied. Ann. **37**, 274—276. 1889.

Sowohl bei rechten, als bei linken Krystallen hat δ oder Δ dasselbe Vorzeichen wie $\omega_1^2 - \omega_2^2$; denn im ersten Falle ist der Nenner des Ausdruckes für x (nämlich $\omega_r^{0^2} - \omega_l^{0^2}$) positiv, dagegen δ^0 und somit $\sin L\,\delta^0$ und (für die in Betracht kommenden x) $\sin L\,\delta^0 \sqrt{1+x^2}$ negativ, und im zweiten Falle ist es umgekehrt.

Die Berechnung von x wird nun wesentlich dadurch erleichtert, dass die transcendente Gleichung 33) in den beim Natriumchlorat vorkommenden Fällen mit genügender Genauigkeit ersetzt werden kann durch eine lineare Relation

$$x = c\,\Delta, \tag{33'}$$

worin c einen für jede speciell gegebene Plattendicke L besonders zu berechnenden constanten Factor bezeichnet. In den einzelnen Fällen der Anwendung wird zu prüfen sein, wie weit diese Annäherung berechtigt ist.

Wir wollen jetzt noch die Ausdrücke für x aufstellen, welche in den speciellen, bei den Beobachtungen vorkommenden Fällen dielektrischer Polarisation, die wir unter a betrachteten, gelten.

Ist die Richtung der Kraftlinien die X^0-Axe, so ist zufolge Ia im Abschnitt a: bei Beobachtung parallel X^0:

$$x = x_1 = \frac{2\,e_{41}\,m}{\omega_r^{0^2} - \omega_l^{0^2}}, \tag{34a}$$

bei Beobachtung parallel den Halbirungslinien der Winkel (Y^0, Z^0) und $(-Y^0, Z^0)$:

$$x = \pm x_2 = \pm \frac{e_{41}\,m}{\omega_r^{0^2} - \omega_l^{0^2}}. \tag{34b}$$

Dieselben Ausdrücke gelten natürlich, wenn die Richtung der Kraftlinien die Z^0-Axe und die Beobachtungsrichtung bezw. die Z^0-Axe oder die Halbirungslinie eines der Winkel zwischen X^0 und Y^0 ist.

Ist die Richtung der Kraftlinien eine Octaëdernormale, die Beobachtungsrichtung senkrecht dazu, so wird nach 31')

$$x = x_3 = \pm \frac{\sqrt{3}\cdot e_{41}\,m}{\omega_r^{0^2} - \omega_l^{0^2}}. \tag{35}$$

Das Vorzeichen hängt ab von der Lage der positiven Momentrichtung zum Coordinatensystem (d. h. davon, in welchem Octanten dieselbe liegt), sowie ausserdem von der Stellung der Platte zum Compensator, und soll daher erst später bestimmt werden.

Den Nenner der Ausdrücke 34) und 35) kann man in folgender Weise durch den mittleren Brechungsindex n^0 und das specifische Drehungsvermögen $\frac{1}{2}\,\delta^0$

des Krystalls ausdrücken. Es ist $\frac{1}{\omega_r^{0^2} - \omega_l^{0^2}} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n_r^{0^2}} - \frac{1}{n_l^{0^2}}} = \frac{1}{v^2} \frac{n_r^{0^2} n_l^{0^2}}{(n_r^0 + n_l^0)(n_l^0 - n_r^0)}$

oder mit sehr grosser Annäherung $= \frac{1}{v^2} \cdot \frac{n^{0^3}}{2} \cdot \frac{1}{n_l^0 - n_r^0}$.

Nun ist

$$\delta^0 = 2\pi\left(\frac{1}{\lambda_r^0} - \frac{1}{\lambda_l^0}\right) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (n_r^0 - n_l^0),$$

folglich wird

$$\frac{1}{\omega_r^{0^2} - \omega_l^{0^2}} = -\frac{1}{v^2} \frac{n^{0^3}\pi}{\lambda\,\delta^0}.$$

Setzt man noch $m = -\varkappa \frac{\partial V}{\partial n}$ ein, wo $\frac{\partial V}{\partial n}$ das Potentialgefälle im Krystal bezeichnet, so nehmen die Formeln 34) und 35), abgesehen von den später zu bestimmenden Vorzeichen, die Gestalt an:

34′) $$x_1 = 2x_2 = 2\frac{e_{41}\varkappa}{v^2} \frac{\partial V}{\partial n} \frac{n^{0^3}\pi}{\lambda\,\delta^0},$$

35′) $$x_3 = \sqrt{3}\frac{e_{41}\varkappa}{v^2} \frac{\partial V}{\partial n} \frac{n^{0^3}\pi}{\lambda\,\delta^0}.$$

Der Factor $\frac{n^{0^3}\pi}{\lambda\,\delta_0}$ erhält bei Benutzung der früher angegebenen optischen Constanten des Natriumchlorats für Natriumlicht den numerischen Werth $16{,}8.10^4$.

d. Berücksichtigung der optischen Anomalien des Natriumchlorats.

Die im Vorhergehenden entwickelte Bestimmung der Schwingungsrichtungen und relativen Verzögerungen kann beim Natriumchlorat nicht immer ohne Weiteres angewendet werden, weil alle grösseren Krystalle desselben bereits von Natur optisch anisotrop sind, also, wie die meisten regulär krystallisirten Substanzen, optische Anomalien zeigen. Dieselben sind hier infolge der Circularpolarisation daran zu erkennen, dass die Krystallplatten beim Drehen in ihrer Ebene zwischen feststehenden Nicols im weissen Licht einen Wechsel der Farbennuance zeigen, was nicht der Fall sein dürfte, wenn sie optisch isotrop und rein circularpolarisirend wären. Nur bei bestimmten Stellungen der Platten gegen die Nicols erscheint die Färbung so tief und homogen, wie sie es im letzteren Falle müsste, bei allen dazwischenliegenden Stellungen dagegen gleichsam mit mehr oder weniger Weiss gemischt, was natürlich beim empfindlichen Blauviolett am auffallendsten ist. Bei den hauptsächlich zur Untersuchung gelangten tafelförmigen, von Würfelflächen begrenzten Krystallen trat bei Beobachtung auf der vor-

herrschenden Würfelfläche, welche die Auflagerungsfläche der Krystalle war, die tiefste Färbung dann ein, wenn die Halbirungslinien der Winkel zwischen dem Hauptschnitt des Polarisators und der Normale zum Hauptschnitt des Analysators mit den Diagonalen jener Würfelfläche zusammenfielen; in den Zwischenstellungen war die Aufhellung in der Mitte der Krystalle stärker als am Rande, im Uebrigen aber ziemlich homogen und zeigte nichts von der Feldertheilung, welche sonst bei optisch anomalen regulären Krystallen gewöhnlich vorhanden ist. Jene Krystalle verhielten sich demnach so, als ob sie durch verschieden starke Spannung parallel den Diagonalen der Auflagerungsfläche dauernde Doppelbrechung angenommen hätten, die sich der Circularpolarisation superponirte. Dieser Auffassung entsprach auch das Verhalten der Platten beim Hindurchsehen parallel zur Auflagerungsfläche, d. h. bei Beobachtung auf den schmalen natürlichen Würfelflächen oder auf angeschliffenen seitlichen Dodekaëderflächen; hierbei zeigte sich nämlich ebenfalls anomale Doppelbrechung, aber der Art, dass die Schwingungsrichtungen parallel und senkrecht zur vorherrschenden Würfelfläche waren. Wenn man nun die anomale Doppelbrechung als durch Spannungen von der bezeichneten Orientirung hervorgerufen ansehen kann, gleichviel ob dies ihre wirkliche Ursache ist oder nicht, so wird dieselbe nach dem Ansatz 24) darstellbar sein durch die Grössen

$$36)\qquad \begin{gathered} B^0_{11} = B^0_{22} = \omega^{0^2} + a', \qquad B^0_{33} = \omega^{0^2}, \\ B^0_{23} = B^0_{31} = 0, \qquad B^0_{12} = b', \end{gathered}$$

falls zur Z^0-Axe die Normale der vorherrschenden Würfelfläche gewählt wird, und a', b' zwei für die anomale Doppelbrechung jedes einzelnen Krystalls bezw. jeder Stelle desselben charakteristische Constanten sind.

Den Werth von b' kann man in folgender Weise durch Compensatorbeobachtungen auf der vorherrschenden Fläche 001 ermitteln. Man stellt den Polarisatorhauptschnitt parallel einer Kante dieser Fläche, die Compensatorhauptschnitte unter 45° dagegen, den Analysator auf möglichste Dunkelheit des Compensatorstreifens und stellt den letzteren ein; dann dreht man die Platte in ihrer Ebene (001) um 90° — wobei darauf zu achten ist, dass man nachher wieder an derselben Stelle beobachtet — und stellt den Compensator wiederum ein. Die Hälfte der hierbei auszuführenden Compensatorverstellung liefert dann nach der Formel 33) eine Grösse x, welche $= \pm \frac{2b'}{\omega_r^{0^2} - \omega_l^{0^2}}$ ist. Durch ein ganz analoges Verfahren kann man auf den zu 001 senkrechten schmaleren Würfelflächen die Grösse a', oder auf den zu 001 senkrechten Dodekaëderflächen $a' + b'$ bezw. $a' - b'$ ermitteln. Die Resultate solcher Beobachtungen werden später für die beiden Platten, wo sie gebraucht wurden, mitgetheilt werden; es sei hier nur erwähnt, dass sie die Uebereinstimmung des Sinnes der Doppelbrechung auf den ganzen 001-Flächen, d. h. das Fehlen von Sectorentheilung, bestätigten. —

Es fragt sich nun, in welcher Weise die im elektrischen Felde eintretenden optischen Wirkungen durch diese anomale Doppelbrechung modificirt werden.

Allgemein werden jetzt die Grössen $B_{hh} - \omega^{0^2}$ und B_{hk}, welche die Doppelbrechung bestimmen, die Summe der bereits vorhandenen, die anomale Doppelbrechung charakterisirenden Grössen 36) und der durch die dielektrische Polarisation hinzukommenden, früher allein berücksichtigten Ausdrücke 19) sein. Wir wollen aber nur diejenigen speciellen Fälle näher betrachten, welche bei den Beobachtungen vorkamen.

Ist zunächst das Moment m parallel der ausgezeichneten Würfelnormale, welche wir oben zur Z^0-Axe gewählt haben, so bleibt

$$B_{11} = B_{22} = \omega^{0^2} + a', \qquad B_{33} = \omega^{0^2}, \qquad B_{23} = B_{31} = 0,$$

und wird

$$B_{12} = b' + e_{41} m.$$

Demzufolge bleibt die Lage der optischen Symmetrieaxen dieselbe wie früher, d. h. die eine von ihnen fällt in die Richtung Z^0 der Kraftlinien, und die beiden anderen (X, Y) halbiren die Winkel zwischen der X^0- und Y^0-Axe. Demnach besitzen auch die Schwingungsrichtungen bei Beobachtung parallel Z^0 oder parallel den die Winkel (X^0, Y^0), $(X^0, -Y^0)$ halbirenden Dodekaëdernormalen die früher (unter Ia, S. 34) bestimmte Lage, unabhängig von der Stärke der anomalen Doppelbrechung und des elektrischen Feldes.

Setzt man die obigen Werthe der Grössen B, sowie die Richtungscosinus der optischen Symmetrieaxen, nämlich

$$\alpha_1 = \beta_2 = -\alpha_2 = \beta_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \qquad \gamma_1 = \gamma_2 = \alpha_3 = \beta_3 = 0, \qquad \gamma_3 = 1,$$

in die Gleichungen 4) zur Bestimmung der Hauptlichtgeschwindigkeiten ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \omega_x^2 &= \omega^{0^2} + a' - b' - e_{41} m, \\ \omega_y^2 &= \omega^{0^2} + a' + b' + e_{41} m, \\ \omega_z^2 &= \omega^{0^2}, \end{aligned}$$

und für die Differenz $\omega_1^2 - \omega_2^2$ folgende Werthe:

für die Beobachtungsrichtung Z^0: $2(e_{41} m + b')$ statt des früheren $2 e_{41} m$,
" " " " Y : $a' - b' - e_{41} m$ " " " $- e_{41} m$,
" " " " X : $a' + b' + e_{41} m$ " " " $+ e_{41} m$.

Bei den in der früher (S. 40) beschriebenen Weise ausgeführten Compensator-Messungen ist demnach die ursprüngliche Einstellung des Compensators bereits von seiner Nullstellung verschieden, und zwar um eine Grösse Δ^0, die sich aus der Gleichung 33) ergiebt, wenn man darin der Grösse x in den obigen 3 Fällen den Werth $x^0 = \dfrac{2b'}{\omega_r^{0^2} - \omega_l^{0^2}}$ bezw. $\dfrac{a' - b'}{\omega_r^{0^2} - \omega_l^{0^2}}$ und $\dfrac{a' + b'}{\omega_r^{0^2} - \omega_l^{0^2}}$ beilegt. Daher erhält man auch, wenn man die bei der dielektrischen Polarisation beobachtete Compensatorverstellung Δ in die Formel 33) einsetzt, nicht die wahren, durch

34a) und 34b) definirten Werthe x_1 und x_2. Man müsste vielmehr zu deren strenger Ermittelung wie folgt verfahren. Zunächst wäre Δ^0, wie S. 43 angegeben, durch Drehen des Krystalles um 90^0 um die jeweilige Beobachtungsrichtung zu bestimmen und nach 33) das entsprechende x^0 zu berechnen; dann $\Delta^0 + \Delta = \Delta'$ in die Gleichung 33) einzusetzen und diese nach x aufzulösen, endlich von dem so gefundenen Werthe $x = x'$ das der betreffenden Beobachtungsrichtung entsprechende x^0 zu subtrahiren; die so erhaltene Differenz $x' - x^0$ ist das richtige x_1, bezw. $\pm x_2$. Sofern nun aber die Gleichung 33) auch für die grössten noch in Betracht kommenden Werthe x' noch mit genügender Annäherung durch die Relation 33'): $x = c\Delta$ ersetzbar ist, kann man sich jene umständliche Rechnung ersparen und die Werthe $x' - x^0 = x_1$ bez. $\pm x_2$ nach dieser linearen Relation aus dem direct beobachteten $\Delta = \Delta' - \Delta^0$ berechnen. Dass dies thatsächlich in den vorkommenden Fällen zulässig war, werden wir später sehen. Man braucht dann also bei der Berechnung von e_{41} aus den Compensatormessungen in den oben bezeichneten Beobachtungsrichtungen die Grössen a' und b' gar nicht zu kennen, d. h. man kann dabei die anomale Doppelbrechung ganz ignoriren.

Ist zweitens die Richtung des Momentes eine der zur vorherrschenden Fläche 001 parallelen Würfelnormalen, etwa die X^0-Axe, so wird

$$B_{11} = B_{22} = \omega^{0^2} + a', \quad B_{33} = \omega^{0^2}, \quad B_{23} = e_{41} m, \quad B_{31} = 0, \quad B_{12} = b'.$$

Da hier zwei der Grössen B_{hk} von 0 verschieden sind, so fällt keine optische Symmetrieebene mehr mit einer Coordinatenebene zusammen.

Für die Beobachtungen kommt hier nur die den Kraftlinien parallele Fortpflanzungsrichtung in Betracht, und es handelt sich zunächst um die theoretische Bestimmung der zu dieser gehörigen Schwingungsrichtungen. Letztere sind die Hauptaxen der Schnittcurve des Ovaloids mit der Wellenebene. Im vorliegenden Falle ist die Gleichung des Ovaloids

$$\varrho^2 = \omega^{0^2} + a'(\mu^{0^2} + \nu^{0^2}) + 2e_{41} m \nu^0 \pi^0 + 2b' \mu^0 \nu^0,$$

und die Wellenebene ist die Y^0Z^0-Ebene, also $\mu^0 = 0$. Demnach ist die Gleichung der Schnittcurve in Polarcoordinaten, wenn das Azimuth φ von der Y^0-Axe aus gerechnet wird,

$$\varrho^2 = \omega^{0^2} + a' \cos^2\varphi + e_{41} m \sin 2\varphi,$$

und die Bedingung für die Maxima und Minima von ϱ lautet

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2e_{41} m}{a'}.$$

Da der Zähler dieses Ausdruckes dem Moment proportional, der Nenner dagegen constant ist, so folgt, dass die Schwingungsrichtungen ihre Lage mit der Stärke des elektrischen Feldes ändern, und zwar so, dass sie anfangs den Würfelkanten parallel sind (— denn φ wird $= 0$ oder

$= \frac{\pi}{2}$ für $m = 0$ —) und sich (— da $\varphi = \frac{\pi}{4}$ oder $\frac{3\pi}{4}$ wird für $m = \infty$ —) mit wachsender Feldstärke einer um 45^0 von der Anfangslage abweichenden Grenzlage nähern, nämlich derjenigen Lage, welche sie bei fehlender anomaler Doppelbrechung von vornherein hätten. Demnach kann es im vorliegenden Falle, wenn man bei wechselnder Feldstärke beobachtet, gar keine festen Schwingungsrichtungen geben und somit auch keine Stellungen der Nicols, für welche deutlich ausgeprägte Minima des Intensitäts- bezw. Farbenwechsels eintreten. Wenn jedoch das maximale Potentialgefälle so gross ist, dass dabei $2e_{41}m$ einen gegen a' grossen Werth und somit die Lage der Schwingungsrichtungen schon nahezu die erwähnte Grenze erreicht, so wird man relative Minima des Intensitätswechsels dennoch bei denjenigen Stellungen der Nicols beobachten, welche jener Grenzlage der Schwingungsrichtungen, also dem normalen Verhalten entsprechen. Letzteres war bei den Beobachtungen auf den Schmalseiten natürlicher Krystallplatten meist in der That sehr nahe der Fall, wie man im nächsten § sehen wird; der Grund dafür liegt also in der Schwäche der anomalen Doppelbrechung und der Grösse der angewandten Feldintensität.

Die Differenz $\omega_1^2 - \omega_2^2$ ergiebt sich für die Richtung X^0 gleich $\sqrt{a'^2 + 4e_{41}^2 m^2}$; somit würde hier die in Gleichung 33) vorkommende Grösse x nicht proportional mit dem Momente m sein. Da ausserdem die Schwingungsrichtungen sich mit m verändern und daher dem Compensator je nach der Feldstärke eine verschiedene Lage gegen den Krystall gegeben werden müsste, damit die Formel 33) noch gültig wäre, so ist es überhaupt unthunlich, bei Elektrisirung parallel X^0 oder Y^0 Compensatormessungen auszuführen.

Wir haben sodann die Fälle zu betrachten, dass die Kraftlinien die Richtung einer in der vorherrschenden Würfelfläche liegenden Dodekaëdernormale (X oder Y nach der Bezeichnung S. 44) besitzen und parallel der anderen (Y oder X) beobachtet wird.

Sind die Kraftlinien parallel Y (Halbirungslinie des Winkels $(+X^0, +Y^0)$, so wird $a = b = m\sqrt{\frac{1}{2}}$, also

$$B_{11} = B_{22} = \omega^{0^2} + a', \quad B_{33} = \omega^{0^2},$$
$$B_{23} = B_{31} = e_{41} m \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \quad B_{12} = b'.$$

Auch hier fällt also keine der optischen Symmetrieaxen mit einer Coordinatenaxe zusammen, und ihre Lage variirt mit m. Ein Schnitt durch das Ovaloid senkrecht zu X hat die Gleichung

$$\varrho^2 = \omega^{0^2} + \frac{a' + b'}{2}(1 - \cos 2\psi) + e_{41} m \sin 2\psi,$$

falls das Azimuth ψ von der Z^0-Axe gegen die Y-Axe hin gerechnet wird. Die Schwingungsrichtungen für die Fortpflanzungsrichtung X bestimmen sich demnach durch

$$\operatorname{tg} 2\psi = -\frac{2e_{41}m}{a'+b'}.$$

Der Winkel ψ durchläuft hiernach die Werthe von 90^0 bis 45^0 (oder 0^0 bis -45^0), wenn m von 0 bis ∞ wächst; der Grenzwerth $\psi = \pm 45^0$ entspricht wieder derjenigen Lage der Schwingungsrichtungen, welche dieselben ohne die anomale Doppelbrechung für jeden Werth m haben würden (vergl. I b, S. 34), und welche man also bei starkem elektrischen Felde und schwacher ursprünglicher Doppelbrechung noch nahezu beobachten wird.

Ist die Richtung der Kraftlinien die X-Axe, so wird $B_{23} = e_{41} m \sqrt{\frac{1}{2}}$, $B_{31} = -e_{41} m \sqrt{\frac{1}{2}}$, und die Gleichung des zur Beobachtungsrichtung Y senkrechten Ovaloidschnittes $\varrho^2 = \omega^{0^2} + \frac{a'-b'}{2}(1-\cos 2\psi) + e_{41} m \sin 2\psi$; der einzige Unterschied gegen den vorhergehenden Fall ist also der, dass $a'-b'$ an Stelle von $a'+b'$ steht.

Zu Compensatormessungen sind diese beiden Fälle aus denselben Gründen ungeeignet, welche oben für den Fall der Elektrisirung und Beobachtung parallel X^0 angeführt wurden.

Für eine Platte, die aus einer Ecke eines natürlichen Krystalls so herausgeschnitten ist, dass ihre Breitseiten einer Octaëderfläche parallel sind, und welche senkrecht zu letzterer dielektrisch polarisirt wird, ergiebt sich bei der in 36) enthaltenen Annahme über die ursprüngliche Doppelbrechung, dass die Schwingungsrichtungen nur noch für diejenige zu den Kraftlinien senkrechte Beobachtungsrichtung, welche zugleich senkrecht ist zur Schnittkante der Octaëderfläche mit der vorherrschenden Würfelfläche 001 des Krystalles, die früher bestimmte Lage, nämlich parallel und senkrecht zu den Kraftlinien, für jede Feldstärke besitzen. Demnach müssen auch Compensatorbeobachtungen, welche in der früheren Weise die durch 35) bestimmte Grösse x_3 liefern sollen, in der soeben definirten Beobachtungsrichtung ausgeführt werden. Bei der Octaëderplatte, welche später zu diesem Zweck wirklich zur Verwendung kam, schien jedoch die bisher gemachte Annahme über die anomale Doppelbrechung; — dass sie als von Spannungen parallel den Diagonalen der Fläche 001 herrührend angesehen werden könne — nicht genau erfüllt zu sein, da bei Beobachtung senkrecht zur Kante 001 : 111 die ursprünglichen Schwingungsrichtungen etwas von den zu 111 parallelen und senkrechten Richtungen abwichen. Ueberhaupt waren bei den besonders grossen Krystallen (— und aus einem solchen war jene Platte geschnitten —) die optischen Anomalien zum Theil unregelmässiger, als sie oben beschrieben wurden.

Als allgemeines Resultat geht aus den vorstehenden Betrachtungen hervor, dass die Bestimmung der Schwingungsrichtungen und die Compensatorbeobachtungen in allen denjenigen Fällen nicht durch die ursprüngliche, anomale Doppelbrechung beeinflusst werden, wo die der letzteren entsprechenden Schwingungsrichtungen bereits dieselbe Lage haben, welche sie in Folge der künstlich hervorgebrachten Doppelbrechung allein einnehmen würden.

Dies ist auch bei den Beobachtungen, die zur Ermittelung der piëzooptischen Constanten dienen sollen, zu berücksichtigen. Beispielsweise kann man dazu Compensatorbeobachtungen in der Richtung Z^0 oder Y^0 an einer parallel X^0 comprimirten natürlichen Würfelplatte nicht verwenden, wohl aber solche Beobachtungen in der Richtung Z^0 an einer parallel einer der Dodekaëdernormalen X oder Y comprimirten Platte, weil dabei die Schwingungsrichtungen schon zu Anfang parallel und senkrecht zur Druckrichtung sind.

§ 3. Elektrooptische Beobachtungen.

a. Die untersuchten Krystallplatten.

Die Natriumchlorat-Krystalle, welche zur Untersuchung gelangten, waren theils von mir selbst im mineralogischen Institut zu Göttingen gezüchtet, theils von Herrn Goldbach in Kehl bezogen. Sie waren grösstentheils nur von Würfelflächen begrenzt und als mehr oder weniger dicke quadratische Tafeln ausgebildet, wobei oft die eine Breitseite (die Auflagerungsfläche) in der Mitte trichterförmig vertieft war. Die grössten, von Hrn. Goldbach stammenden Krystalle, deren Kanten bis zu $2\frac{1}{2}$ cm lang waren, enthielten einen zu Beginn des Wachsthums gebildeten, der Mitte der einen Breitseite anliegenden, einschlussreichen Kern, und waren daher nicht in ihrer ganzen Ausdehnung verwendbar. Unter den selbstgezüchteten befanden sich aber einige ganz klare tafelförmige Krystalle mit glatten Flächen, welche ohne weitere Bearbeitung benutzt werden konnten; hierher gehört insbesondere die zu einem Theil der Compensatormessungen verwandte, später schlechthin als „Würfelplatte“ bezeichnete Krystallplatte, deren Dicke ($\| Z^0$) 3,77 mm betrug und deren längere Kanten 12,0 bezw. 11,35 mm maassen, und welche nur mässig starke, gegen die Ränder hin abnehmende anomale Doppelbrechung zeigte.

Zum Zwecke der Beobachtungen in der Richtung von Dodekaëdernormalen war aus dem oberen, klaren Theile eines der grossen Krystalle eine Platte so geschnitten, dass ihre Breitseiten parallel der vorherrschenden Würfelfläche (001) des Krystalles, also senkrecht zur Z^0-Axe nach der Festsetzung in § 2*d*, waren, und dass die schmalen Seitenflächen von den zu 001 senkrechten Dodekaëderflächen (110 und $1\bar{1}0$) gebildet wurden, somit unter 45^0 gegen die langen Kanten des ursprünglichen Krystalles (die X^0 und Y^0-Axe) geneigt waren. Diese Platte, welche in erster Linie zu allen absoluten Messungen diente, soll einfach als „Dodekaëderplatte“ bezeichnet werden. Die ursprüngliche Doppelbrechung war ziemlich stark, aber nahezu gleichmässig auf der ganzen Ausdehnung der Breitseiten (weil die Platte aus dem Innern des grossen Krystalles geschnitten war) und entsprach gut der in § 2*d* gemachten Annahme. Die Dicke der Platte betrug 3,48 mm, die Länge ihrer Schmalseiten anfangs 15,2 und 15,6 mm, später, nachdem sie zum Zwecke der piëzoelektrischen Beobachtungen neu abgeschliffen waren, 13,55 und 15,2 mm. Schliesslich war noch aus der Ecke eines grossen Krystalles eine Platte so geschnitten, dass ihre Breitseiten nahezu die Orien-

tirung einer Octaëderfläche (111) besassen. Zwei der Schmalseiten dieser „Octaëderplatte“ waren parallel zu der Schnittkante der Flächen 111 und 001 angeschliffen, damit man, wie in § 2*d* begründet wurde, senkrecht zu dieser Kante beobachten konnte; die breiten Flächen der Platte hatten dementsprechend die Form eines Paralleltrapezes, dessen Höhe etwa 6,3 mm betrug. Die Dicke der Platte war = 2,55 mm. Wegen dieser kleinen Dimensionen und der dadurch bedingten Krümmung der Schmalseiten gestattete diese Platte keine genauen Messungen. Ausserdem schien sie aus zwei Theilen von verschiedener anomaler Doppelbrechung zu bestehen, die in einer zur Höhenlinie des Trapezes parallelen Dodekaëderfläche zusammenstiessen. —

Die Präparate mussten wegen ihrer grossen Hygroskopicität, die auch bei ihrer vom Herrn Mechaniker Brunnée in Göttingen ausgeführten Herstellung besondere Schwierigkeiten verursacht hatte, stets in einem Exsiccator aufbewahrt werden.

b. Beobachtungen der Schwingungsrichtungen.

Experimentelle Anordnung. Als Polarisator und Analysator dienten, wie bei den übrigen elektrooptischen Beobachtungen, zwei grosse Nicol'sche Prismen, welche mit Theilkreisen verbunden waren, an denen ihre Drehung bis auf $\frac{1}{10}^{0}$ abgelesen werden konnte. Sie waren auf Stativen von regulirbarer Höhe so aufgestellt, dass ihre Drehungsaxen möglichst in eine und dieselbe, der Beobachtungsrichtung parallele horizontale Gerade fielen. Zwischen den Nicols wurde, in gleicher Höhe mit deren Mitte und etwa in deutlicher Sehweite vom Beobachter, die Krystallplatte zwischen den zur Herstellung des elektrischen Feldes dienenden Conductorplatten aufgestellt. Diese letzteren mussten in den Fällen, wo in der Richtung der elektrischen Kraftlinien beobachtet werden sollte, durchsichtig sein. Sie wurden daher anfangs hergestellt durch frische Gelatineschichten, deren jede zwischen einer kleineren und einer grösseren Glasplatte lag, also durch letztere ringsum isolirt war und durch einen mit dem einen Ende zwischen die Glasplatten hineingeschobenen Stanniolstreifen entweder mit der Erde oder mit einem Pol der Influenzmaschine verbunden werden konnte. Diese Platten wurden vermittelst Holzklötzen senkrecht zur Beobachtungsrichtung in solchem gegenseitigen Abstande aufgestellt, dass der gerade zu untersuchende Krystall, von kleinen Glasstücken gehalten, eben dazwischen passte. Später wurden als durchsichtige Conductorplatten mit Wasser gefüllte schmale Glaströge benutzt, welche an den Breitseiten eines ähnlichen, nur breiteren und höheren Glastroges angekittet, also auch isolirt waren. In dem mittleren Trog wurde auf einem Glasklotz die zu untersuchende Krystallplatte so aufgestellt, dass sie sich etwa zwischen den Mitten der seitlichen Tröge befand. Es wurden verschiedene solche dreifache Glaströge benutzt: kleinere mit 4,1 bezw. 4,63 mm lichter Weite des Mitteltroges zu Beobachtungen an dünneren Platten in der Richtung Z^{0}, und ein grösserer, dessen Mitteltrog innen 16,2 mm Weite besass, für die Untersuchung dickerer Krystalle, sowie für solche Fälle, wo die Platte mit ihren längeren Kanten parallel den Kraftlinien gestellt werden sollte. Die

Seitentröge besassen immer etwa 5 mm Weite. Sowohl die breiten Seitenflächen aller Tröge, als die schmalen des Mitteltroges wurden von Spiegelglasplatten gebildet, so dass man nicht nur parallel den Kraftlinien, sondern auch senkrecht zu denselben (also parallel den Breitseiten der Tröge) durch den Krystall hindurchsehen konnte. Der mittlere Trog wurde meist mit Benzol gefüllt, welches stets mittelst Natriumstückchen wasserfrei gehalten wurde. Das Eintauchen des Krystalles in Benzol sollte einerseits die Bildung einer leitenden Feuchtigkeitsschicht auf der Oberfläche des Krystalles, die das elektrische Feld in seinem Inneren mehr oder weniger geschwächt hätte, verhindern, andererseits die Störung der Lichtstrahlen durch die Unebenheiten und Krümmung der Krystalloberfläche abschwächen. Ausserdem wird durch die Gegenwart des Benzols in denjenigen Fällen, wo der Krystall die Weite des Troges nicht ganz ausfüllt, an und für sich schon das Potentialgefälle innerhalb des Krystalles verstärkt, wie die Formel 12a in § 3*b* des I. Theiles erkennen lässt.

Wenn senkrecht zu den Kraftlinien beobachtet werden sollte, konnten natürlich auch undurchsichtige, also metallene Conductorplatten angewendet werden, z. B. Stanniolbelegungen auf Glimmerplatten. Dieselben wurden dann mit der dazwischen liegenden Krystallplatte in horizontaler Lage auf Holzklötzen in geeigneter Höhe zwischen die Nicols gebracht. —

Bei den Beobachtungen zur Bestimmung der Schwingungsrichtungen wurde immer die eine Conductorplatte bezw. die Flüssigkeit in dem einen Seitentroge mit der Gasleitung, die andere mit dem einen Pol der Holtz'schen Maschine durch Drähte verbunden, und die Maschine bei geeignetem Abstand ihrer Elektroden ganz langsam gedreht; bei jeder Funkenentladung fand dann ein plötzlicher Abfall der Potentialdifferenz der Conductorplatten und eine entsprechende plötzliche Aenderung der Doppelbrechung des Krystalles statt. Diese im Moment der Entladung eintretende plötzliche Aenderung zu beobachten ist zweckmässig einmal, weil sie am leichtesten wahrnehmbar ist, dann aber auch, weil sie selbst bei Vorhandensein einer schlecht leitenden Oberflächenschicht noch merklich ist.

Um zunächst die Ablesungen an den Theilkreisen der Nicols auf eine feste Richtung im Krystall beziehen zu können, wurde meist so verfahren, dass die lange Diagonale (also die Polarisationsebene) des Polarisators einer Kante der Krystallplatte parallel gestellt und dann der Analysator so gedreht wurde, dass das Gesichtsfeld neben der Platte völlig dunkel erschien. Bisweilen wurde die Orientirung der Nicols in Bezug auf die Oberseite der Krystallplatte auch dadurch ermittelt, dass sie auf Auslöschung eines auf die letztere quer zur Beobachtungsrichtung gelegten kleinen Beryllprismas eingestellt wurden. Die Einstellung war in beiden Fällen mindestens bis auf 1^0 sicher, was vollständig genügte, da die Stellungen für die Minima des Intensitäts- bezw. Farbenwechsels bei den Entladungen der Conductorplatten nur bis auf 1 bis 2^0 bestimmt werden konnten. Diese Minima wurden durch successives Drehen beider Nicols aufgesucht und zwar, wie früher erwähnt, für die empfindliche blauviolette Farbe der Platte; als Lichtquelle diente dabei ein Argandbrenner.

Resultate. Entsprechend der theoretischen Entwicklung in § 2*b* werden nachstehend mit i' und ψ' bezeichnet die Azimuthe des Polarisators und Analysators, für welche der Farbenwechsel der Platte möglichst gering war, und zwar werden beide Winkel von einer Kante der Krystallplatte (meist der vertikalen) an gerechnet. Es giebt natürlich 4 um je 90^0 verschiedene solche Stellungen des Polarisators und zu jeder derselben wieder 2 um 180^0 verschiedene des Analysators. Wo diese verschiedenen Stellungen beobachtet worden sind, sind sie aber der Uebersichtlichkeit halber in den nachstehenden Tabellen immer auf eine von ihnen reducirt, indem von den beiden direct abgelesenen Winkeln i' und ψ' zugleich 90^0 oder 180^0 oder 270^0 subtrahirt wurden. Jede einzelne Stellung wurde als Mittelwerth aus 3 bis 4 Einstellungen bestimmt.

In der dritten Columne ist der aus i' und ψ' nach der Formel 32″) berechnete Winkel φ angegeben, d. i. das gesuchte Azimuth einer der Schwingungsrichtungen, bezogen auf dieselbe Krystallkante wie i' und ψ', welches natürlich auch nur bis auf $\pm 90^0$ bestimmt ist, also um diesen Betrag beliebig geändert werden konnte, je nachdem es gerade bequem war. Der Werth von φ ist jedesmal in zwei Theile zerlegt, von denen der erste, fett gedruckte denjenigen Werth angiebt, welchen φ nach der in § 2*a* entwickelten Theorie haben müsste, so dass also der zweite Theil die Abweichung der beobachteten von der theoretischen Lage der Schwingungsrichtungen bedeutet. Die vierte und fünfte Columne enthalten die durch $\psi' - i' \mp 90^0$ gegebene Drehung $\frac{1}{2} L\delta^0$ der Krystallplatte für diejenige Lichtsorte, für welche das Minimum des Intensitätswechsels bestimmt wurde, sowie die daraus berechnete specifische Drehung $\frac{1}{2}\delta^0$ (immer positiv gerechnet als Linksdrehung); dieselbe ist nur angegeben, um zu zeigen, in welchen Grenzen etwa die an sich belanglose Auswahl der empfindlichen Färbung variirte. (Man vergleiche die S. 30 angeführten Werthe von $\frac{1}{2}\delta^0$ für verschiedene Farben). Vor jeder Beobachtungsreihe ist die Fläche des Krystalles, welche zur Beobachtungsrichtung senkrecht stand, sowie die parallel der letzteren gerechnete Dicke L desselben in mm angegeben. —

A. Kraftlinien- und Beobachtungsrichtung eine Würfelnormale.

	i'	ψ'	φ	$\frac{1}{2} L\delta^0$	$\frac{1}{2}\delta^0$
Würfelplatte I. Breitseite, $L = 3{,}77$	$-50^0\,20'$	$+50^0$	$\mathbf{45^0} - 0^0\,10'$	$+10^0\,20'$	$+2{,}75^0$
Erste Schmalseite, $L = 12{,}0$	$+23^0\,48'$	$-28^0\,30'$	$\mathbf{45^0} - 2^0\,21'$	$+38^0\,20'$	$+3{,}19^0$
	$24^0\,18'$	$27^0\;6'$	$-1^0\,24'$		
	$24^0\,54'$	$26^0\,12'$	$-0^0\,39'$		
	$24^0\,42'$	$27^0\,12'$	$-1^0\,15'$		
	$+24^0\,25'$	$-27^0\,15'$	$-1^0\,25'$		
Zweite Schmalseite, $L = 11{,}35$	$+26^0\,12'$	$-27^0\,30'$	$\mathbf{45^0} - 0^0\,39'$	$+36^0\,10'$	$+3{,}17^0$
	$27^0\,24'$	$26^0\,24'$	$+0^0\,30'$		
	$27^0\,18'$	$26^0\,24'$	$+0^0\,27'$		
	$27^0\,18'$	$26^0\,48'$	$+0^0\,12'$		
	$+27^0\,3'$	$-26^0\,47'$	$+0^0\;8'$		

	i'	ψ'	φ	$\frac{1}{2}L\delta^0$	$\frac{1}{2}\delta^0$
Würfelplatte II. Breitseite, $L = 5{,}2$	+38° 20′	−36° 15′	45° + *1° 3′*	+15° 25′	+2,96°
Würfelplatte III. Breitseite, $L = 5{,}0$	+52° 35′	− 50° 40′	45° + *58′*	−13° 15′	−2,83°
1te Schmalseite, $L = 14{,}0$	+67° 1′	+111° 36′	45° − *42′*	−45° 25′	−3,24°
2te „ $L = 13{,}7$	+65° 40′	+115° 39′	45° + *40′*	−40° 1′	−2,92°
Würfelplatte IV. Breitseite, $L = 5{,}8$	+52° 45′	−55° 25′	45° − *1° 20′*	−18° 10′	−3,13°
Schmalseite, $L = 17{,}5$	−18° 42′	+15° 38′	45° − *1° 32′*	−55° 40′	−3,18°
Würfelplatte V.					
1te Schmalseite, $L = 18{,}0$	−12° 35′	+14° 45′	45° + 1° 5′	−62° 22′	−3,46°
	12° 15′	14° 25′	+1° 5′		
	14° 35′	13° 21′	−0° 37′		
	13° 47′	14° 49′	+0° 31′		
	−13° 18′	+14° 20′	45° + *31′*		
2te Schmalseite, $L = 17{,}2$	−16° 59′	+15° 10′	45° − 0° 55′	−58° 16′	−3,35°
	15° 50′	15° 15′	−0° 18′		
	16° 28′	15° 6′	−0° 41′		
	16° 46′	15° 22′	−0° 42′		
	−16° 31′	+15° 13′	− *0° 39′*		
Würfelplatte VI.					
Breitseite, $L = 10$	−26° 48′	+32° 18′	45° + 2° 45′	−30° 11′	−3,02°
	27° 42′	32° 6′	+2° 12′		
	28° 18′	31° 42′	+1° 42′		
	28° 48′	31° 36′	+1° 24′		
	−27° 54′	+31° 55′	+ *2° 1′*		
Desgl., entgegengesetzt elektrisirt.	−28° 12′	+31° 54′	45° + 1° 49′	−30° 3′	−3,01°
	28° 30′	31° 18′	+1° 24′		
	−28° 21′	+31° 36′	+ *1° 37′*		

Die Abweichung des beobachteten Werthes φ von dem theoretischen (45°) beträgt also im Maximum 2°, meist viel weniger, welche Uebereinstimmung in Anbetracht der 1 bis 2° erreichenden Beobachtungsfehler ganz befriedigend ist.

Ebenso fand sich die Forderung der Theorie, dass bei dielektrischer Polarisation parallel einer Würfelnormale die optischen Axen in die beiden anderen Würfelnormalen fallen sollen, insofern bestätigt, als an den Würfelplatten auf den zu den Kraftlinien parallelen Würfelflächen keine Spur von elektrooptischer Wirkung wahrzunehmen war, während gleichzeitig die Wirkung in der Richtung der Kraftlinien sehr deutlich war.

Zwei Beobachtungsreihen auf der Breitseite der „Dodekaëderplatte“ ergaben:

	i'	ψ'	φ	$\frac{1}{2} L\delta^0$	$\frac{1}{2}\delta^0$
1. Stellung.	95° 27′	−5° 24′	0° + 1,5′		
	96° 6′	−5° 34′	+ 16′		
	96° 0′	−5° 28′	+ 16′		
	95° 16′	−5° 4′	+ 6′		
	95° 42′	−5° 22′	+ *10′*	−11° 4′	−3,18°
2. Stellung.	95° 30′	−5° 55′	0° − 12,5′		
	95° 6′	−6° 32′	−43′		
	94° 37′	−6° 43′	−1° 3′		
	95° 0′	−5° 38′	−19′		
	95° 3′	−6° 12′	− *34½′*	−11° 15′	−3,24°

Hier müssen, falls die Schmalseiten der Platte genau orientirt sind, die Schwingungsrichtungen mit den Plattenkanten zusammenfallen, entsprechend $\varphi = 0$; in der That ergab sich, wie vorstehende Tabelle zeigt, φ nur $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{2}^0$ von 0 verschieden.

B. Kraftlinien parallel der Z^0-Axe, Beobachtungsrichtung eine dazu senkrechte Dodekaëdernormale (X oder Y).

Beobachtungen auf den Schmalseiten der Dodekaëderplatte, die sich im kleineren Glastrog oder zwischen Metallplatten in einem elektrischen Felde mit zu ihren Breitseiten normalen Kraftlinien befand, ergaben folgende Resultate.

	i'	ψ'	φ
1te Schmalseite.	+ 25° 32′	−116° 34′	0° − 31′
	25° 46′	116° 42′	−28′
	26° 56′	115° 16′	+ 50′
	25° 38′	116° 52′	−37′
	+ 25° 58′	−116° 21′	− *12′*
2te Schmalseite.	+ 24° 57′	−115° 31′	0° − 17′
	25° 59′	114° 1′	+ 59′
	26° 0′	114° 19′	+ 50′
	26° 33′	115° 1′	+ 46′
	+ 25° 52′	−114° 43′	+ *35′*

Spätere Beobachtungen ergaben ebenfalls befriedigende Uebereinstimmung mit der Theorie, welche zufolge Ia in § 2*a* hier den Werth $\varphi = 0$ verlangt; es wurde nämlich im Mittel gefunden

auf den längeren Schmalseiten $\varphi = +1^0 18'$, $(\frac{1}{2} L\delta^0 = 43^0$, $\frac{1}{2}\delta^0 = 3{,}17^0)$,
„ „ kürzeren „ $\varphi = +18'$, $(\frac{1}{2} L\delta^0 = 48^0 48'$, $\frac{1}{2}\delta^0 = 3{,}21^0)$.

C. Kraftlinien parallel X, Beobachtungsrichtung Y, oder umgekehrt.

Die Dodekaëderplatte wurde so in den grossen Trog gebracht, dass die einen längeren Kanten den Kraftlinien des elektrischen Feldes, d. i. der Normale der breiten Seitenwände des Troges, parallel waren, während man parallel den anderen durch die schmalen Seitenwände des Troges hindurchsehen konnte. Die Azimuthe wurden auf die quer zur Beobachtungsrichtung liegende kurze Kante der Platte, d. i. Z^0 bezogen, mit welcher die Schwingungsrichtungen theoretisch Winkel von 45^0 bilden müssen, wie in I b, S. 34, § 2*a* gezeigt worden ist. Die Beobachtungsresultate sind folgende:

Beobachtungsrichtung	i'	ψ'	φ
parallel den kürzeren Kanten;	$-21^0 12'$	$+24^0 30'$	$45^0 + 1^0 39'$
	$22^0\ 0'$	$23^0 42'$	$+0^0 49'$
	$22^0 12'$	$24^0 24'$	$+1^0\ 6'$
	$23^0 54'$	$23^0 48'$	$-0^0\ 3'$
	$-22^0 20'$	$+24^0\ 6'$	$+53'$
parallel den längeren Kanten;	$-18^0\ 0'$	$+23^0 18'$	$45^0 + 2^0 39'$
	$18^0 18'$	$22^0 54'$	$2^0 18'$
	$19^0 54'$	$21^0 30'$	$0^0 48'$
	$20^0 48'$	$21^0 36'$	$0^0 24'$
	$-19^0 15'$	$+22^0 20'$	$+1^0 33'$
desgl. bei entgegengesetzter Elektrisirung.	$-19^0 18'$	$+22^0\ 0'$	$45^0 + 1^0 21'$
	$20^0 18'$	$21^0 48'$	$+0^0 45'$
	$19^0 36'$	$21^0 12'$	$+0^0 48'$
	$20^0 24'$	$21^0 30'$	$+0^0 33'$
	$-19^0 54'$	$+21^0 38'$	$+0^0 52'$

Die Uebereinstimmung mit der Theorie ist also auch hier recht gut, obgleich möglicherweise die ursprüngliche Doppelbrechung hätte stören können. Der Einfluss der letzteren zeigte sich darin, dass die Stellungen der Nicols, für welche das Maximum der Wirkung eintrat, etwas unsymmetrisch zwischen den Minimum-Stellungen lagen und sich dementsprechend bei Umkehrung des Elektrisirungssinnes verschoben.

Der in § 2*a* entwickelten Theorie zufolge müssen im vorliegenden Fall die optischen Axen parallel den Kraftlinien und der Plattennormale Z^0 sein, und in der That war bei Beobachtung in diesen beiden Richtungen keinerlei optische Wirkung des wechselnden elektrischen Feldes wahrzunehmen, wie man auch die Nicols stellen mochte.

D. Kraftlinien parallel einer Octaëdernormale, Beobachtungsrichtung senkrecht dazu und zur Kante 111 : 001.

Die unter *a*) dieses § beschriebene Octaëderplatte wurde zwischen zwei Metallplatten einem elektrischen Felde mit zu ihren Breitseiten senkrechten Kraftlinien ausgesetzt, und dabei der Farbenwechsel auf den beiden einander parallelen Schmalseiten beobachtet. Dann muss der Theorie in § 2*a* (S. 36) und § 2*d* (S. 47) gemäss das auf die Plattennormale bezogene Azimuth $\varphi = 0$ sein. Beobachtet wurde:

	i'	ψ'	φ
	$+7^0 24'$	$+78^0 18'$	$0^0 - 2^0 9'$
	$6^0 42'$	$79^0 0'$	$-2^0 9'$
	$8^0 24'$	$79^0 0'$	$-1^0 18'$
	$8^0 36'$	$78^0 24'$	$-1^0 30'$
Bei entgegengesetzter Elektrisirung.	$7^0 36'$	$77^0 54'$	$-2^0 15'$
	$7^0 48'$	$78^0 12'$	$-2^0 0'$
	$7^0 45'$	$78^0 28'$	$-1^0 54'$

Eine andere Beobachtungsreihe ergab im Mittel $\varphi = -2^0 30'$.

Dass hier die Uebereinstimmung nicht ganz so gut ist, wie in den früheren Fällen, liegt wohl theils an der ungenaueren Einstellung infolge der kleinen Dimensionen, theils an der bereits erwähnten Abweichung der anomalen Doppelbrechung von dem in § 2*d* vorausgesetzten Verhalten.

In Uebereinstimmung mit der Theorie, nach welcher die Platte optisch einaxig mit zur Breitseite senkrechter optischer Axe werden muss (sofern man von den Anomalien absieht, was hier zulässig ist), wurde keine Farbenänderung beobachtet, wenn man die Platte in dem schmalen Trog mit der Breitseite senkrecht zu den Kraftlinien aufstellte und parallel den letzteren hindurchsah.

c. Beobachtungen des Gangunterschiedes.

Nachdem die im vorhergehenden Abschnitte besprochenen Beobachtungen gezeigt hatten, dass die Lage der Schwingungsrichtungen, d. h. der Hauptaxen der Schwingungsellipsen, der Theorie bis auf kaum über die Grenze der Beobachtungsfehler hinausgehende Abweichungen entsprach, konnten Messungen der Gangunterschiede für Natriumlicht mittelst des Compensators auf Grund der in § 2*c* durchgeführten Rechnung ausgeführt werden, indem der Compensator und die Nicols in die dort (S. 40) vorausgesetzte Orientirung in Bezug auf die theoretischen Schwingungsrichtungen gebracht wurden. Um aber sicher zu sein, dass die aus der Gleichung 33) berechnete Grösse x wirklich die Bedeutung von $\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_r^{0^2} - \omega_l^{0^2}}$ hatte, musste ich mich bei den Compensatorbeobachtungen

auf solche Fälle beschränken, in denen zufolge den in § 2*d* angestellten Ueberlegungen die ursprünglich vorhandene anomale Doppelbrechung auch bei sehr schwacher elektrooptischer Wirkung vollständig ignorirt werden kann. Es sind dies folgende Fälle: 1. Beobachtungsrichtung und Richtung der Kraftlinien senkrecht zur Breitseite der Würfel- oder der Dodekaëderplatte (also parallel Z^0); 2. Beobachtungsrichtung senkrecht zu den Schmalseiten der Dodekaëderplatte, Kraftlinien wie zuvor; 3. Beobachtung an der Octaëderplatte unter gleichen Umständen, wie bei der Bestimmung der Schwingungsrichtungen.

Die verlangte Orientirung der Nicols und Compensatorhauptschnitte wurde in der Weise hergestellt, dass zunächst die lange Diagonale des Polarisators unter demjenigen Winkel gegen eine Krystallkante eingestellt wurde, welchen die Halbirungslinie des Winkels zwischen den theoretischen Schwingungsrichtungen mit der betreffenden Kante bildete, dann der Compensator um seine horizontale Axe (cf. Theil I, § 3*a*) zunächst bis zum Verschwinden der Streifen, welches bei Coincidenz seines einen Hauptschnittes mit dem des Polarisators eintritt, und darauf aus dieser Stellung um weitere 45^0 gedreht, und endlich der Analysator so gestellt wurde, dass der Compensatorstreifen möglichst scharf erschien. Dann sind die Bedingungen erfüllt, welche der in § 2*c* angegebenen Berechnung zu Grunde liegen. Das Nähere über die Ausführung der Compensator-Beobachtungen selbst ist dort bereits gesagt worden.

Bei den unter 1) und einem Theil der unter 2) erwähnten Beobachtungen war die Krystallplatte in einem der früher beschriebenen Glaströge (demjenigen von der lichten Weite 4,63 mm) aufgestellt und zwar meist in Benzol eingetaucht, sowohl um oberflächliche Leitung möglichst zu verhindern, als auch um die Schärfe des durch die Platte hindurch gesehenen Compensatorstreifens zu verbessern. In diesen Fällen bedarf man, um aus dem Ladungspotential V der mit der Influenzmaschine und Batterie verbundenen Wasserfüllung des einen Seitentroges das Potentialgefälle $\frac{\partial V}{\partial n}$ im Innern der Krystallplatte nach der Formel 12a) berechnen zu können, der Kenntniss der Dielektricitätsconstanten des Natriumchlorates (K), des die Trogwände bildenden Glases (K_1) und des Benzols (K_2). Für die letztere kann mit hinreichender Sicherheit der Werth 2,3 angenommen werden; dagegen waren K und K_1 unbekannt und hätten auch für statische Ladungen nicht leicht zuverlässig bestimmt werden können. Für das $NaClO_3$ ergab eine von Herrn Prof. Nernst freundlichst ausgeführte vergleichende Messung nach der von demselben in den Nachr. der Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1893, 762—72, beschriebenen Methode einen Werth der Dielektricitätsconstante, der das $2\frac{1}{2}$fache von demjenigen für Hartgummi war, wonach K etwa $= 6$ zu setzen wäre. Für das Glas mag der Werth $K_1 = 7{,}5$ angenommen werden nach Bestimmungen verschiedener Beobachter für statische Ladungen. Immerhin können diese Annahmen nur zu einer rohen Schätzung des Nenners in dem Ausdruck 12a) dienen, und es können demnach die im Glastrog angestellten Compensatormessungen nur unter einander verglichen, nicht aber

zur Berechnung des absoluten Werthes der Constante e_{41} verwendet werden. Hierzu sind nur die Messungen auf den Schmalseiten der Dodekaëderplatte brauchbar, bei denen diese direct zwischen zwei auf bestimmte Potentialdifferenz geladenen Metallplatten lag. Dass die Conductorplatten dem Krystall direct anliegen und nicht durch Schichten eines anderen Dielektricums, wie etwa Glimmer, von ihm getrennt sind, ist für die absolute Berechnung des Potentialgefälles in dem Krystall auch deshalb wünschenswerth, weil nur in diesem Fall eine leitende Oberflächenschicht des letzteren unschädlich ist (abgesehen von der etwa durch sie verursachten schnelleren Abnahme der Potentialdifferenz). Sind nämlich zwischen der Krystallplatte und den Conductorplatten Schichten eines anderen Dielektricums vorhanden, so bildet sich auf der Oberfläche des Krystalls, falls sie etwas leitet, eine inducirte elektrische Belegung, welche das Potentialgefälle in seinem Inneren schwächt. Umgekehrt findet eine Verstärkung des Potentialgefälles statt, wenn jene Zwischenschichten noch bessere Leitungsfähigkeit besitzen, als der Krystall. Letzteres war vermuthlich bei den Glaswänden der Tröge der Fall, wenn sich die Krystallplatte in Benzol befand; dann war nämlich die oberflächliche Leitungsfähigkeit der letzteren offenbar verschwindend gering, da die durch eine bestimmte Potentialdifferenz der Seitentröge hervorgerufene Doppelbrechung kaum eine merkliche Abnahme zeigte, wenn man die Potentialdifferenz längere Zeit hindurch constant erhielt.

Damit das Potential bei jedem einzelnen Versuch während der Zeit, welche die Compensatoreinstellung erforderte, möglichst constant blieb, war die zu ladende Conductorplatte mit mehreren grossen Leydener Flaschen verbunden. Hierdurch war in der That eine sehr gute Constanz des Potentials erreicht, selbst wenn die Conductorplatten dem Krystall direct anlagen; freilich wurden diese Beobachtungen auch zu einer Zeit ausgeführt, wo die Luftfeuchtigkeit sehr gering war.

Die Messung des Ladungspotentials geschah bei einigen Versuchsreihen mit Hülfe der Maassflasche in der Weise, dass die Compensatoreinstellung unmittelbar vor der bei einer bestimmten Schlagweite erfolgenden Entladung beobachtet wurde. Später wurde aber immer das in § 3 des I. Theiles beschriebene Bifilar-Elektrometer benutzt, welches durch langsame Vermehrung der Ladung oder Ableitung mittelst eines Holzstabes leicht auf einen bestimmten, dem gerade gewünschten Potential entsprechenden Ausschlag eingestellt werden konnte. Nach jeder Beobachtung wurde die Batterie entladen und die Nullstellung des Elektrometers und Compensators neu bestimmt; wenn die letztere sich ein wenig (um einige Hundertstel Umdrehung) geändert hatte, wurde das Mittel aus dem vor und nach der Ladung gefundenen Werthe in Rechnung gezogen. —

A. Kraftlinien und Beobachtungsrichtung parallel der Würfelnormale Z^0.

1. Beobachtungen auf der Breitseite der Würfelplatte.

Die Compensatorhauptschnitte mussten hier parallel den Diagonalen der Platte gestellt werden. — Aus der Dicke $L = 3{,}77$ mm folgt für Natriumlicht $L\delta^0 = 23^0 47'$, und bei Einsetzung dieses Werthes ergiebt die Formel 33)

für $x =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$-\varDelta =$	0,152	0,305	0,458	0,611	0,7465	0,916	1,069	1,220.

Nun betrug die Verschiebung $2\varDelta^0$, welche man infolge der ursprünglichen Doppelbrechung bei Drehung der Platte um 90^0 in ihrer Ebene beobachtete (vergl. § 2*d*, S. 43), im Maximum, nämlich in der Mitte der Platte, 0,88 Umdrehungen. Die grössten im elektrischen Felde beobachteten Verschiebungen $\varDelta$ betrugen etwa 0,63, folglich betrug der grösste Gesammtwerth $\varDelta'$ im Falle gleichen Vorzeichens von $\varDelta^0$ und $\varDelta$ höchstens 1,07, entsprechend dem Werthe $x = 0{,}7$. Demnach kommt hier für den Werth von x in 33) nur das Intervall von 0 bis 0,7 in Betracht, und für dieses ist zufolge den oben angegebenen Zahlen, aus denen sich $\frac{\varDelta}{x} = -1{,}52$ für $x = 0{,}1$ und $= -1{,}53$ für $x = 0{,}7$ ergiebt, $\varDelta$ sehr nahe proportional mit x, so dass die vereinfachte Formel 33') mit vollkommen genügender Genauigkeit angewendet werden kann. Dieselbe wird hier:

$$x = -0{,}655\varDelta.$$

Was die Formel 12a) zur Berechnung der Feldstärke $\frac{\partial V}{\partial n}$ aus dem beobachteten Potential V betrifft, so war im vorliegenden Fall, da die Platte immer in dem Glastrog von der Weite 0,463 cm untersucht wurde und da $D = 0{,}377$ war, $D_2 = 0{,}086$, ferner D_1, d. i. die Dicke beider Glaswände des Mitteltrogs zusammengenommen, $= 0{,}197$. Bei den oben (S. 56) motivitirten Annahmen $K = 6$, $K_1 = 7{,}5$ wird daher der Nenner des Ausdruckes 12a), falls die Platte von Luft umgeben, $= 1{,}05$, und falls sie von Benzol umgeben war, $= 0{,}76$. —

Die Compensatoreinstellungen einer ersten Versuchsreihe, wobei das Potential durch die Schlagweite $a = 2{,}0$ der Maassflasche gemessen, also nach den S. 25 mitgetheilten Angaben Hrn. Heydweiller's $= 53{,}4$ absoluten Einheiten war, mögen, um ein Beispiel zu geben, direct wie sie abgelesen wurden angegeben werden. In den mit + und — bezeichneten Zeilen stehen die Einstellungen bei abwechselnd positiver und negativer Ladung der Vorderseite des Trogs, in der mittleren Zeile die jedesmal zwischen zwei solchen Einstellungen bestimmte Nullstellung des Compensators. Die Mittelwerthe von $\varDelta$ und die daraus berechneten von x sind immer nur dem absoluten Betrage nach ange-

geben, da eine krystallographische Unterscheidung der Ecken der Würfelplatte und somit eine Vorzeichenbestimmung von e_{41} doch nicht möglich war.

Platte in L u f t. Beobachtet in der Mitte der Platte.

+				1,42				1,37		
0	0,99		0,99		0,97		0,97		0,95	
−		0,53				0,55				
Δ		−0,46		+0,44		−0,42		+0,41,		Mittel $\lvert\Delta\rvert$ = **0,433.**
										x = **0,284.**

Platte in B e n z o l.

Mitte der Platte.

+				1,89					2,00		
0	1,35		1,32		1,35		1,33	| 1,41		1,42	
−		0,76				0,77					
Δ		−0,575		+0,555		−0,57			+0,585		Mittel $\lvert\Delta\rvert$ = 0,571.

Nahe dem rechten Rande.

+		1,83				1,80				
0	1,22		1,27		1,22		1,24		1,23	
−				0,65				0,67		
Δ		+0,585		−0,595		+0,57		−0,565.		Mittel $\lvert\Delta\rvert$ = 0,579.

Nahe dem linken Rande.

+				1,76				1,77		
0	1,18		1,16		1,19		1,15		1,21	
−		0,56				0,56				
Δ		−0,61		+0,585		−0,61		+0,59.		Mittel $\lvert\Delta\rvert$ = 0,599.

Gesammtmittel in Benzol: $\lvert\Delta\rvert$ = **0,583**, daraus x = **0,382.**

Da bei den Beobachtungen in Luft $\frac{\partial V}{\partial n} = 53{,}4 : 1{,}05 = 50{,}8$, bei denen in Benzol $\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{53{,}4}{0{,}76} = 70{,}3$ war, so ergiebt sich der auf das Potentialgefälle 1 reducirte Werth von x, welcher immer mit $\bar{x}$ bezeichnet werden soll und hier ausserdem entsprechend der Unterscheidung in den Formeln 34) den Index 1 erhält, wie folgt:

aus den Beobachtungen in L u f t $\bar{x}_1$ = **0,00558,**

„ „ „ „ B e n z o l $\bar{x}_1$ = **0,00543.**

Unsere Annahme über die Dielektricitätsconstanten des $NaClO_3$ und des Glases haben also hier zu guter Uebereinstimmung der Resultate geführt.

Spätere Versuche, in Luft zu beobachten, scheiterten an der oberflächlichen Leitung der Krystallplatten; alle folgenden Beobachtungsresultate wurden also bei in Benzol eingetauchter Platte erhalten.

Eine Beobachtungsreihe, bei welcher das Potential mittelst des Bifilar-Elektrometers gemessen wurde und 52 bis 55 (c. g. s.) betrug, ergab bei zwei Stellungen der Platte, die sich durch eine Drehung von 90° um die Z^0-Axe unterschieden, folgende Mittelwerthe von $|\varDelta|:V$

	linker Rand	Mitte	rechter Rand
1. Stellung	0,0112	0,0108	0,0112
2. Stellung	0,0114	0,0116	0,0115

Aus dem Gesammtmittel $\frac{|\varDelta|}{V} = 0{,}0113$ folgt $\overline{x_1} = \mathbf{0{,}00556}$.

Bei Anwendung kleinerer Potentiale (28 bis 29) wurde später jedoch der viel kleinere Werth $\frac{|\varDelta|}{V} = 0{,}00825$, $\overline{x_1} = \mathbf{0{,}00404}$ gefunden.

2. Beobachtungen auf der Breitseite der Dodekaëderplatte.

Hier ist $L = 0{,}348$ cm, $L\delta^0 = -22^0\,0'$, und die Formel 33) ergiebt demgemäss

$$\varDelta = +0{,}142 \text{ für } x = 0{,}1, \qquad \varDelta = +0{,}710 \text{ für } x = 0{,}5.$$

Also ist $\varDelta$ in diesem Intervall und noch bis $x = 1$ wiederum proportional mit x, und zwar wird

$$x = +\mathbf{0{,}704}\,\varDelta.$$

Der von der ursprünglichen Doppelbrechung bedingte Werth $\varDelta^0$ wurde ziemlich übereinstimmend auf der ganzen Breitseite der Platte $= 0{,}45$ gefunden, und es kamen demnach bei den elektrooptischen Beobachtungen keine über das Gültigkeitsgebiet der vorstehenden Relation hinausgehende Werthe von $\varDelta$ vor.

Für den Nenner des Ausdruckes 12a) ergiebt sich der Werth $0{,}348 + 0{,}157 + 0{,}30 = 0{,}805$, so dass die Feldintensität in der Platte nahe $= \frac{5}{4}\,V$ war.

Bei einer Beobachtungsreihe wurde aber das Potentialgefälle bei gleichem V dadurch verändert, dass zwischen die Krystallplatte und die Glaswand des Troges ein Glasstreifen von 0,091 cm Dicke eingeschoben wurde, wodurch D_1 um diesen Betrag zunahm, D_2 um ebensoviel abnahm und $\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{V}{0{,}64}$ wurde. Es wurde in diesem Fall bei dem Potential 53,4, entsprechend der Maassflaschenentladung beim Kugelabstand $a = 2{,}0$, beobachtet im Mittel:

$$\varDelta = 0{,}62,$$

woraus folgt

$$x_1 = \mathbf{0{,}00523}.$$

Dagegen wurde bei gleichem Potential ohne eingeschobenen Glasstreifen (immer aber in Benzol) gefunden

$$\varDelta = 0{,}515 \text{ im Mittel,}$$

und folglich

$$\overline{x_1} = \mathbf{0{,}00535},$$

also in befriedigender Uebereinstimmung mit dem ersteren Werth.

Eine Beobachtungsreihe mit noch etwas höheren Potentialen, die mittelst des Bifilar-Elektrometers gemessen wurden, ergab bei den vier, durch eine Drehung von je 90° um die Beobachtungsrichtung verschiedenen Stellungen der Krystallplatte folgende Resultate:

1. Stellung.

	linker Rand		Mitte		rechter Rand	
V	+53,2	−53,2	+53,2	−53,2	+53,2	−53,2
$\lvert\varDelta\rvert$	0,57	0,60	0,62	0,635	0,60	0,62
$\frac{\lvert\varDelta\rvert}{V}$	0,0109		0,0117		0,0113	

$$\text{insgesammt } \frac{|\varDelta|}{V} = \mathbf{0{,}0113}.$$

	2. Stellung, Mitte		3. Stellung, Mitte		4. Stellung, Mitte	
V	+55,1	−54,5	+56,1	−56,1	+56,1	−56,1
$\lvert\varDelta\rvert$	0,72	0,68	0,705	0,705	0,60	0,56
$\frac{\lvert\varDelta\rvert}{V}$	**0,0127**		**0,01254**		**0,0103**	

Da sich im 1. Falle ziemlich gute Uebereinstimmung zwischen den Verzögerungen in der Mitte und an den Rändern der Platte ergeben hatte, und somit die dielektrische Polarisation als homogen betrachtet werden durfte, so ist weiterhin nur in der Mitte der Platte beobachtet worden. Das Gesammtmittel aus den vorstehenden Resultaten ist: $\frac{|\varDelta|}{V} = 0{,}0117$ woraus folgt $\overline{x_1} = \mathbf{0{,}00663}$.

Eine letzte ausführliche Beobachtungsreihe mit niedrigeren Potentialen, welche hauptsächlich zum Vergleich mit den unter gleichen Umständen auf den Schmalseiten der Platte beobachteten Gangunterschieden diente, führte wieder auf kleinere Werthe von $\overline{x_1}$. Die nachstehend angegebenen Werthe $\varDelta$ sind immer das Mittel aus je 5 Einstellungen.

	1. Stellung der Platte				2. Stellung				1. Stellung wiederholt			
V	−27,4	−27,4	+28,4	+28,0	−28,0	−28,0	+28,0	+28,0	−28,1	−28,1	+27,8	+
$\varDelta$	+0,225	+0,22	−0,24	−0,24	−0,212	−0,228	+0,225	+0,227	+0,226	+0,228	−0,216	−
$10^3 \cdot \frac{\lvert\varDelta\rvert}{V}$	8,21	8,01	8,46	8,56	7,54	8,17	8,07	8,12	8,05	8,12	7,75	8
$\frac{\lvert\varDelta\rvert}{V}$ Mittel:	0,0083				0,0080				0,0081			

$$\text{Gesammtmittel } \frac{|\varDelta|}{V} = \mathbf{0{,}0081}, \text{ daraus } \overline{x_1} = \mathbf{0{,}0046}.$$

Wie man sieht, differiren die auf der Breitseite der Würfel- und Dodekaëderplatte bei verschiedenen Beobachtungsreihen gefundenen Werthe von x_1 sehr erheblich, namentlich ergaben die Versuche mit hohen Potentialen (53,4 bis 60,5) stets grössere Werthe als diejenigen mit niederen Potentialen (27 bis 28); denn es wurde gefunden:

an der Würfelplatte für hohe Potentiale $\overline{x_1} = 0{,}0054$ bis $0{,}0056$, für niedere 0,00404,
„ „ Dodekaëderplatte „ „ „ $\overline{x_1} = 0{,}0052$ bis $0{,}0066$, „ „ 0,0046.

Möglicherweise erklärt sich dieser Unterschied dadurch, dass bei den hohen Spannungen die Glaswände des Troges nicht mehr hinreichend isolirten, und somit ein Theil der Ladung auf deren Innenseite überging, was eine Steigerung des Potentialgefälles in der Krystallplatte zur Folge haben musste.

B. Kraftlinien parallel der Würfelnormale Z^0, Beobachtungsrichtung parallel den zu Z^0 senkrechten Dodekaëdernormalen.

Diese Beobachtungen wurden auf den Schmalseiten der „Dodekaëderplatte“ ausgeführt; dabei betrug die Kantenlänge parallel der Beobachtungsrichtung anfangs 15,15 und 15,6 mm, später 13,55 und 15,2 mm. Nun ergiebt die Formel 33)

für $L = 15{,}5$, $L\delta^0 = -98^0$ $+\varDelta = 0{,}3745$ $1{,}86$ $2{,}935$ $3{,}624$
für $x = 0{,}1$ $0{,}5$ $0{,}8$ $1{,}0$;
für $L = 15{,}15$, $L\delta^0 = -95{,}8^0$ $+\varDelta = 0{,}3733$ für $x = 0{,}1$, $3{,}62$ für $x = 1{,}0$;
für $L = 13{,}55$, $L\delta^0 = -85\frac{2}{3}^0$ $+\varDelta = 0{,}378$ für $x = 0{,}1$, $1{,}87$ für $x = 0{,}5$.

Demnach ist bei diesen grossen Dicken das Verhältniss $\varDelta : x$ zwar nicht mehr ganz constant, kann aber immer noch in Anbetracht der geringen Genauigkeit, mit welcher $\varDelta$ selbst ermittelt werden konnte, durch einen mittleren constanten Werth ersetzt werden, der sich aber nach dem in Betracht kommenden Intervall von x richten muss.

Die Verschiebung des Compensatorstreifens, welche in Folge der ursprünglichen Doppelbrechung bei der Drehung der Platte um die Beobachtungsrichtung beobachtet wurde (also $2\Delta^0$ nach der Bezeichnung in § 2*d*), betrug auf der einen Schmalseite 1,20, auf der anderen $-$ 0,9 Umdrehungen. Nun waren die grössten durch dielektrische Polarisation bewirkten Verschiebungen Δ etwa $=$ 0,76, folglich das für Δ überhaupt in Betracht kommende Intervall dasjenige von 0 bis ca. 1,35, und in diesem gilt durchschnittlich

$$x = +0{,}268\Delta, \text{ wenn } L = 15{,}15 \text{ bis } 15{,}6 \text{ ist,}$$
$$x = +0{,}266\Delta, \text{ wenn } L = 13{,}55 \text{ ist.}$$

Der Fehler, den man bei Annahme dieser Proportionalität macht, beträgt nicht einmal 2 Proc. und gleicht sich überdies aus, da mit positiver und negativer Ladung beobachtet wurde.

Zunächst wurde eine Reihe von Beobachtungen bei gleicher Aufstellung der Platte im mit Benzol gefüllten Trog angestellt, wie bei der letzten Beobachtungsreihe auf der Breitseite. Die Resultate sind:

	Beob. ‖ den längeren Kanten				‖ den kürzeren Kanten (L = 13,55)					
V	+27,9	+27,9	−28,0	−28,3	+28,3	+28,0	+27,9	−28,0	−27,9	−27,9
Δ	+0,21	+0,22	−0,273	−0,268	−0,307	−0,292	−0,282	+0,297	+0,317	+0,292
$\frac{\|\Delta\|}{V}$	0,00754	0,00790	0,00975	0,00947	0,0109	0,0104	0,0101	0,0106	0,0113	0,0104

Mittel: $\pm$ **0,00867** $\mp$ **0,0106**;

woraus $\overline{x_2} = \pm$ **0,00186** $\overline{x_2} = \mp$ **0,00227**.

Der Theorie nach (cf. S. 34 und 41) sollten diese Werthe entgegengesetztes Vorzeichen haben und dem absoluten Werthe nach beide gleich $\frac{1}{2}\overline{x_1}$ sein. Ersteres haben die Beobachtungen bestätigt; von den absoluten Werthen stimmt der zweite mit dem unter gleichen Umständen gefundenen $\frac{1}{2}\overline{x_1} = 0{,}0023$ genau überein, während der erste erheblich zu klein ist, offenbar weil die Ablesungen Δ $=$ 0,21 und 0,22 durch irgend einen Fehler zu klein ausgefallen sind; denn später haben sich die auf beiden Schmalseiten ermittelten absoluten Werthe untereinander gleich ergeben. Es sei noch erwähnt, dass das Vorzeichen von Δ auf jeder Schmalseite dasselbe war, wie unter gleichen Umständen, d. h. bei gleicher Elektrisirung und gleicher Stellung des Compensators, auf der Breitseite, ebenfalls in Uebereinstimmung mit der Theorie.

Im Uebrigen ist das wirkliche Vorzeichen von $\overline{x_2}$, also auch dasjenige von e_{41}, auch hier noch unbestimmt gelassen, da der Krystall keine Tetraëderflächen besessen hatte, in Bezug auf welche man das Coordinatensystem hätte orientiren können.

Sodann wurden Beobachtungen angestellt, bei denen die Platte in Luft zwischen zwei aussen mit Stanniol belegten Glimmerplatten lag. Die Dicke der letzteren zusammengenommen betrug 0,015 cm, und da die Dielektricitätsconstante des Glimmers = 6,64 ist, so ergiebt sich aus 12a) $\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{V}{0,362}$. Der Compensatorspalt stand hier vertikal, d. h. parallel den Kraftlinien und der Plattennormale. Beobachtet wurde:

parallel den kürzeren Kanten:

	5 mm vom linken Rande		5 mm vom rechten Rande	
V	− 28,0	+ 28,0	− 28,0	+ 28,0
$\varDelta$	+ 0,61 0,67 0,61 } 0,63	− 0,705 0,665 0,65 0,68 } 0,675	+ 0,535 0,49 0,52 } 0,515	− 0,63 0,545 0,56 } 0,578
$\frac{\lvert\varDelta\rvert}{V}$	0,0232		0,0195	

zusammen $\mp$ **0,0214**;

daraus $\overline{x}_2 = \mp$ **0,00206**;

parallel den längeren Kanten:

	Mitte		etw. links davon (rechts nicht gut beobachtbar)	
V	− 28,0	+ 28,0	− 28,0	+ 28,0
$\varDelta$	− 0,735 0,64 0,64 0,625 } 0,66	+ 0,61 0,59 0,60 } 0,60	− 0,62 0,545 0,58 } 0,58	+ 0,58 0,57 0,56 0,54 } 0,56
$\frac{\lvert\varDelta\rvert}{V}$	0,0225		0,0203	

zusammen $\pm$ **0,0214**,

also ebenfalls $\overline{x}_2 = \pm$ **0,00206**.

Die Forderung der Theorie, dass die auf den beiden Schmalseiten bestimmten Werthe von $\overline{x}$ entgegengesetzt gleich sein müssen, bestätigt sich hier also vollständig. Der absolute Werth von $2\overline{x}_2$, der gleich $\overline{x}_1$ sein sollte, erreicht nur die kleinsten für letztere Grösse gefundenen Werthe, doch sind letztere, weil durch Beobachtungen im Benzoltrog gefunden, mit den gegenwärtigen Resultaten auch nicht sicher vergleichbar. Auch diese Beobachtungen, wobei die Platte zwischen

Glimmerplatten lag, schienen zur absoluten Berechnung von e_{41} noch nicht sicher genug, da sie bei späterer Wiederholung kleinere Werthe, als die obigen, lieferten, wahrscheinlich wegen schlechterer Isolation der Krystallplatte. Es wurde daher nun die Krystallplatte direct zwischen zwei Metallplatten gelegt, welche dann jedoch, um das Ueberspringen von Funken zu vermeiden, nur auf niedrigere Potentialdifferenzen gebracht werden konnten, wie die Conductorplatten bei den früheren Versuchen. Es wurde immer soweit geladen, dass das Bifilar-Elektrometer beim Kugelabstand $e^0 = 30{,}7$ mm und dem Scalenabstand $A = 282$ einen Ausschlag von 40 Scalentheilen gab, woraus der Werth von $V' = 16{,}5$, also derjenige des Potentiales $= 15{,}7$ folgt. Bei dieser Versuchsanordnung wurden die Werthe Δ auf jeder Schmalseite bei zwei verschiedenen Lagen der Platte an verschiedenen Stellen derselben gemessen. Das Vorzeichen von V in den nachstehenden Tabellen ist dasjenige der Ladung der einen, durch eine Marke bezeichneten Plattenfläche.

Beobachtet parallel den kürzeren Kanten ($L = 15{,}15$ mm).

Erste Lage.

	Linke Seite				Rechte Seite			
V	+ 15,7		− 15,7		+ 15,7		− 15,7	
Δ	− 0,40 0,355 0,365	0,373	+ 0,36 0,34 0,34	0,347	− 0,335 0,35 0,335	0,34	+ 0,34 0,335 0,34	0,338
$\frac{\Delta}{V}$	− 0,0229				− 0,0216			

Zweite Lage.

	4 mm vom linken Rand				Mitte				5 mm vom rechten Rand			
V	+ 15,7		− 15,7		+ 15,7		− 15,7		+ 15,7		− 15,7	
Δ	−0,345 0,310 0,355	0,333	+ 0,355 0,335 0,34	0,347	−0,315 0,315	0,315	+ 0,325 0,325 0,335	0,328	−0,33 0,35 0,34	0,34	+ 0,31 0,315 0,34	0,322
$\frac{\Delta}{V}$	− 0,0216				− 0,0205				− 0,0211			

Gesammtmittel $\frac{\Delta}{V} =$ **−0,02154.**

Beobachtet parallel den längeren Kanten ($L = 15{,}6$).

Erste Lage.

	4 mm vom linken Rand		Mitte		4 mm vom rechten Rand	
V	+15,7	−15,7	+15,7	−15,7	+15,7	−15,7
Δ	+0,345 0,33 0,33 } 0,335	−0,345 0,33 0,34 } 0,338	+0,335 0,345 0,325 } 0,335	−0,325 0,31 0,315 } 0,317	+0,36 0,325 0,345 } 0,343	−0,36 0,335 0,355 } 0,350
$\frac{\Delta}{V}$	+0,0214		+0,02075		+0,0222	

Zweite Lage.

	Nahe dem linken Rand		Etwas links von der Mitte		Etwas rechts von der Mitte	
V	+15,7	−15,7	+15,7	−15,7	+15,7	−15,7
Δ	+0,345 0,33 0,345 } 0,34	−0,375 0,375 0,39 } 0,38	+0,375 0,37 } 0,373	−0,41 0,43 } 0,42	+0,35 0,37 0,36 } 0,36	−0,36 0,335 0,34 } 0,345
$\frac{\Delta}{V}$	+0,0229		+0,0253		+0,0224	

$$\text{Gesammtmittel } \frac{\Delta}{V} = +\mathbf{0{,}0225}.$$

Die *Gleichheit der absoluten Werthe der auf den beiden Schmalseiten beobachteten Gangunterschiede bei entgegengesetzten Vorzeichen* bestätigt sich auch hier. Ebenso sind die an derselben Stelle bei entgegengesetzter Ladung beobachteten Werthe Δ stets nahezu entgegengesetzt gleich, sodass sich die Voraussetzung der Umkehrbarkeit der elektrooptischen Wirkung mit dem Moment ebenfalls erfüllt zeigt.

Zur Berechnung von x, — hier x_2 —, aus Δ dient hier für beide Beobachtungsrichtungen die Gleichung $x = 0{,}268\,\Delta$, und zufolge Formel 12) ist $\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{V}{0{,}348}$; also ergiebt sich aus allen vorstehenden Beobachtungen zusammen ohne Rücksicht auf das Vorzeichen: $\bar{x}_2 = 0{,}0220 \cdot 0{,}348 \cdot 0{,}0268$ oder

$$\bar{x}_2 = \mathbf{0{,}00205}.$$

Eine andere Beobachtungsreihe bei gleicher Anordnung, bei der aber das Potential nicht immer auf gleiche Höhe gebracht, sondern so wie es gerade ausfiel am Elektrometer abgelesen wurde, lieferte folgende, aus je etwa 20 einzelnen

Einstellungen bei Potentialwerthen von 15 bis 17 abgeleitete Mittelwerthe von $|\Delta| : V$:

0,0201 bei Beobachtung parallel den kürzeren (jetzt nur 13,55 mm langen) Kanten,
0,0219 „ „ „ „ längeren Kanten.

Hieraus folgt $\overline{x}_2 = 0{,}00187$ bezw. $0{,}00204$, und das Mittel aus beiden:

$$\overline{x}_2 = \mathbf{0{,}001955}.$$

Als definitiver Werth soll der Mittelwerth aus diesem und dem aus der ersten Beobachtungsreihe gewonnenen: 0,00205 angenommen werden, also

$$\overline{x}_2 = \mathbf{0{,}00200},$$

welcher wohl bis auf etwa 5 Procent zuverlässig ist und übrigens auch gut mit demjenigen übereinstimmt, der oben aus den bei höherem Potential angestellten Versuchen mit Glimmerschutzplatten gefunden wurde.

Nach der Formel 34′) ist nun $\frac{e_{41}\varkappa}{v^2} = \frac{\overline{x}_2}{16{,}8} \cdot 10^{-4}$; daraus findet sich schliesslich:

$$\frac{e_{41}\varkappa}{v^2} = \mathbf{1{,}19} \cdot 10^{-8}.$$

Es handelt sich nun noch um die Feststellung des Vorzeichens dieser Constante, welches erst dadurch bestimmt wird, dass man dem Coordinatensystem eine bestimmte Lage in Bezug auf die Tetraëderflächen des Krystalles giebt, d. h. festsetzt, in welchen Octanten des von drei Würfelnormalen gebildeten Coordinatenaxenkreuzes die äusseren Normalen dieser Flächen liegen sollen. Hierzu mussten also Beobachtungen der elektrooptischen Wirkung an Krystallen angestellt werden, die Tetraëderflächen aufwiesen. Solche fanden sich unter den von mir gezüchteten Krystallen vor, und zwar sowohl linke als rechte. Beobachtungen auf den Würfelflächen, wobei sich die Krystalle im mit Benzol gefüllten Glastrog befanden, ergaben nun für beide Arten von Krystallen folgendes Resultat. Stellte man den Krystall mit einer Würfelfläche nach vorn so auf, dass eine Tetraëderfläche rechts oben vorn lag, stellte man ferner den Compensator so dahinter, dass sein Spalt, also auch die Streifen unter 45° gegen die Würfelkanten von links unten nach rechts oben verliefen, und lud man nun die hintere Seite des Troges positiv, so musste der Compensator auf kleinere Zahlen gedreht werden, d. h. es war Δ negativ; das gleiche Vorzeichen hatte also nach der Formel 33) auch $\omega_1^2 - \omega_2^2$, d. h. die Verzögerung der im Fall fehlender Circularpolarisation senkrecht zum Compensatorspalt polarisirten Welle gegen die andere. Verbindet man nun mit dem wie angegeben aufgestellten Krystall das rechtwinklige Axensystem $X^0 Y^0 Z^0$ in der gewöhnlichen Lage, d. h. so, dass die $+X^0$-Axe nach vorn, die $+Z^0$-Axe nach oben gerichtet ist, so zeigen die Formeln 29), dass bei der obigen Stellung des Compensators und Richtung der Kraft-

linien ($\| X^0$) $\omega_1^2 - \omega_2^2 = \omega_y^2 - \omega_z^2 = -2e_{41}m$ ist; ferner ist m positiv, wenn die Hinterseite positiv geladen wird; folglich hat $-e_{41}$ dasselbe Vorzeichen, welches bei obiger Beobachtung $\varDelta$ besass, d. h. negatives, und wir erhalten das Resultat:

Wählt man das von den Würfelnormalen gebildete Coordinatensystem so, dass eine Tetraëderfläche im ersten Octanten liegt, so ist sowohl bei linken als bei rechten Krystallen die Constante e_{41} positiv, und zwar

$$\frac{e_{41}\varkappa}{v^2} = +\mathbf{1{,}19} \cdot 10^{-8}.$$

C. Beobachtungen an der senkrecht zu ihren Breitseiten polarisirten Octaëderplatte.

Diese Platte wurde ebenfalls in Luft zwischen Metallplatten untersucht, die Beobachtungsrichtung war senkrecht zu den Kraftlinien und überdies senkrecht zu den beiden einander parallelen Schmalseiten der Platte, wie bei den Bestimmungen der Schwingungsrichtungen. Der Compensatorspalt wurde parallel der Plattennormale gestellt. Es wurden folgende Mittelwerthe von $\varDelta$ beobachtet:

1. bei direct anliegenden Metallplatten für $V = +11{,}8 \quad -11{,}8$

$$\varDelta = +0{,}36 \quad -0{,}34$$

$$\frac{|\varDelta|}{V} = +0{,}0296;$$

2. bei durch eine Luftschicht von 0,023 cm von der Krystallplatte getrennten Metallplatten: für $V = +13{,}8 \quad -13{,}8$

$$\varDelta = +0{,}291 \quad -0{,}28$$

$$\frac{|\varDelta|}{V} = +0{,}02066.$$

Dabei ist V positiv gerechnet, wenn diejenige Plattenfläche $F^{\times}$, welche durch ein Kreuz bezeichnet war, positive Ladung erhielt.

Im ersten Falle war $\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{V}{D} = \frac{V}{0{,}262}$, im zweiten ungefähr $= \frac{V}{0{,}4}$; ferner wird für diese Beobachtungsrichtung, da $L = 6{,}3$ mm war, die Näherungsformel 33'):

$$x = 0{,}415\,\varDelta.$$

Demnach findet man aus den Beobachtungen 1) $x = \bar{x}_3 = 0{,}00322$,
aus den Beobachtungen 2) $x = \bar{x}_3 = 0{,}00343$,
also im Mittel

$$\bar{x}_3 = \mathbf{0{,}00333}.$$

Nach den theoretischen Resultaten, welche in den Formeln 34) und 35) ausgedrückt sind, muss $\bar{x}_3 = \sqrt{3} \cdot \bar{x}_2$ sein, also wenn man den in B gefundenen Werth von $\bar{x}_2$: 0,0020 einsetzt,

$$\bar{x}_3 = \mathbf{0{,}00347}.$$

Die Uebereinstimmung ist also recht befriedigend trotz der wegen der Kleinheit und Unebenheit der Seitenflächen der Platte schwierigen Beobachtungen.

Aus den obigen elektrooptischen Beobachtungen lässt sich jetzt die krystallographische Orientirung der bezeichneten Plattenbreitseite $F^{\times}$ feststellen. Nach Formel 31′) wird nämlich, da e_{41} positiv ist, die Platte negativ doppeltbrechend, wenn die positive Momentrichtung im 1ten Octanten liegt; nach den Beobachtungen wird sie negativ doppeltbrechend, nämlich Δ negativ, wenn die Fläche $F^{\times}$ negativ geladen wird; folglich liegt die äussere Normale von $F^{\times}$ im 1ten Octanten, oder die bezeichnete Plattenseite wäre einer Tetraëderfläche zugekehrt gewesen, falls diese am Krystall entwickelt gewesen wären.

§ 4. **Piëzoelektrische Beobachtungen.**

Das piëzoelektrische Verhalten des Natriumchlorats ist durch eine einzige Constante δ_{14} charakterisirt; denn die durch mechanische Einwirkung erregten Momente sind zufolge 25), § 1:

$$a = -\delta_{14} Y_z, \qquad b = -\delta_{14} Z_x, \qquad c = -\delta_{14} X_y.$$

Für die experimentelle Bestimmung dieser Constante kommen nur Beobachtungen bei einseitigem Drucke in Betracht. Die Richtung des letzteren ist am zweckmässigsten so zu wählen, dass sie in einer Coordinatenebene liegt und den Winkel zwischen den betreffenden Coordinatenaxen halbirt; dann ist nämlich nur eine der Druckcomponenten Y_z, Z_x, X_y von 0 verschieden und zwar hat dieselbe ihren grössten möglichen Werth $\frac{1}{2}p$, wenn p die Grösse des einseitigen Druckes ist, und ferner ist dann das erregte Moment senkrecht zu der die Druckrichtung enthaltenden Coordinatenebene, so dass es durch Messung der auf einer zu letzterer parallelen Krystallfläche entwickelten Elektricitätsmenge gefunden werden kann. Dieser Fall liegt vor, wenn die schon bei den elektrooptischen Beobachtungen beschriebene Dodekaëderplatte parallel ihren langen Kanten, also durch Belastung eines Schmalseitenpaares, comprimirt wird. Denn die Druckrichtung halbirt dann den Winkel $(+X^0, +Y^0)$ oder $(+X^0, -Y^0)$, und es ist somit $Y_z = Z_x = 0$, $X_y = +\frac{1}{2}p$ oder $-\frac{1}{2}p$, und also

$$a = 0, \qquad b = 0, \qquad c = -\tfrac{1}{2}\delta_{14}p \text{ oder } +\tfrac{1}{2}\delta_{14}p,$$

so dass die Breitseiten der Platte sich mit elektrischen Belegungen von der Dichtigkeit $\mp \frac{1}{2}\delta_{14}p$ laden. Werden die Breitseiten der Platte mit Stanniolbelegungen versehen, so können diese Elektricitätsmengen durch das Potential, zu welchem sie einen Conductor von bekannter Capacität laden, gemessen werden.

Die experimentelle Anordnung zur Ausführung dieser Beobachtungen war genau dieselbe, wie bei der Untersuchung der Herren Riecke und Voigt über die Piëzoelektricität des Quarzes und Turmalins, so dass wegen der Einzelheiten auf die von jenen gegebene ausführliche Beschreibung [1]) verwiesen werden kann. —

1) E. Riecke und W. Voigt, Wied. Ann. **45**, 530—532. 1892.

Die Krystallplatte wurde auf einer ihrer Schmalseiten auf einer Hartgummiplatte vertikal aufgestellt, dann eine zweite Hartgummiplatte oben darauf gelegt und mit einem bestimmten Gewicht belastet, welches auf eine Waagschale gesetzt wurde, die an einem über die obere Hartgummiplatte gelegten Rahmen hing. Vermittelst federnder Contacte waren die Stanniolbelegungen der Breitseiten mit zwei Klemmen eines Commutators leitend verbunden, die ihrerseits mit der Gasleitung bezw. mit zwei Quadranten eines Thomsonschen Elektrometers, dessen Nadel durch eine Zamboni'sche Säule geladen war, in Verbindung standen. Es wurde der Ausschlag φ_0 des vorher jedesmal zur Erde abgeleiteten Elektrometers beobachtet, welcher bei einer bestimmten Vermehrung oder Verminderung der Belastung der Platte eintrat. Um aus diesem das Potential, zu welchem durch die auf der Plattenoberfläche entwickelte Elektricitätsmenge die Elektrometerquadranten nebst der Plattenbelegung und den Verbindungsdrähten geladen wurden, berechnen zu können, beobachtete man den durch ein Clarkelement hervorgebrachten Elektrometerausschlag Φ; dann ist das fragliche Potential, ausgedrückt durch die elektromotorische Kraft des Clarkelementes, gleich $\frac{\varphi_0}{\Phi}$, oder in absolutem elektrostatischem Masss $\frac{\varphi_0}{\Phi}\cdot 0{,}478\cdot 10^{-2}$. Ist nun C die Capacität aller auf dieses Potential geladenen Leitertheile, so ist die gesammte entwickelte Elektricitätsmenge $C\cdot\frac{\varphi_0}{\Phi}\cdot 0{,}478\cdot 10^{-2}$, und somit, wenn P die entsprechende Belastungsänderung, q' die Grösse der belegten Plattenfläche und q diejenige der belasteten Fläche bezeichnet,

$$37)\qquad \pm\tfrac{1}{2}\,\delta_{14} = \frac{c}{p} = \frac{\varphi_0}{\Phi}\cdot\frac{q}{Pq'}\,C\cdot 0{,}478\cdot 10^{-2}.$$

Dabei ist P in Dynen, also Grammen multiplicirt mit 981, auszudrücken, wenn man δ_{14} in absolutem Maass erhalten will.

Der Ausschlag φ_0 konnte nicht in der gewöhnlichen Weise aus den direct beobachteten Umkehrpunkten berechnet werden, weil auf das durch den Elektricitätsverlust während der Beobachtungsdauer verursachte Zurückgehen der Ruhelage Rücksicht genommen werden musste. Während dies bei der Untersuchung von Hrn. Riecke und Voigt in der Weise geschehen konnte, dass das Zurückgehen der Ruhelage als gleichförmig angenommen wurde, schien letztere Annahme bei den Beobachtungen am Natriumchlorat nicht mehr zulässig, da wegen der geringen Dicke und grösseren oberflächlichen Leitungsfähigkeit der untersuchten Platte der Elektricitätsverlust verhältnissmässig stärker war, trotz der grossen Lufttrockenheit, bei welcher die Beobachtungen angestellt wurden. Eine genauere Berücksichtigung des Elektricitätsverlustes wird man durch die Annahme erhalten, dass derselbe dem augenblicklich auf der mit dem Elektrometer verbundenen Belegung herrschenden Potential proportional ist, woraus dann folgt, dass sich die Ruhelage des Elektrometers dem Nullpunkt nach dem Gesetze $\varphi_0 e^{-ct}$

nähert, wenn c eine der gerade vorhandenen oberflächlichen Leitungsfähigkeit proportionale Constante und t die seit dem Momente der Ladung vergangene Zeit ist. Bezeichnen nun a eine von der Torsionskraft der Aufhängung, b eine von der Dämpfung der Elektrometernadel abhängige Constante, so hat dann die Differentialgleichung der Schwingungen des Elektrometers die Form

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2b\frac{d\varphi}{dt} + a\varphi = a\varphi_0 e^{-ct}$$

und ergiebt für den zur Zeit t beobachteten, von der Ruhelage des zur Erde abgeleiteten Elektrometers aus gerechneten Ausschlag die Lösung

$$\varphi = \varphi_0 \frac{a}{a-2bc+c^2}\left\{e^{-ct} + (c-b)\frac{T}{2\pi}\sin 2\pi\frac{t}{T}e^{-bt} - \cos 2\pi\frac{t}{T}e^{-bt}\right\},$$

worin $\frac{2\pi}{T} = \sqrt{a-b^2}$ ist.

Im vorliegenden Falle konnten nun c^2, cb und b^2 neben a vernachlässigt werden; dann erhält man für die Zeitpunkte t_h der Umkehr der Nadel die Relation

$$\sin 2\pi\frac{t_h}{T} = \frac{2\pi c}{aT}\left(e^{(b-c)t_h} - (-1)^h\right),$$

und die entsprechenden Werthe $\varphi = \varphi_h$, d. h. die Umkehrpunkte selbst sind gegeben durch

$$\varphi_h = \varphi_0\left\{e^{-ct_h} - (-1)^h e^{-bt_h}\right\}.$$

Solange man für t_h den Näherungswerth $h\cdot\frac{T}{2}$ setzen, d. h. die Schwingungsdauer als constant ansehen kann, was bei kleinem c jedenfalls für die ersten Schwingungen zulässig ist, erhält man demnach für φ_h die einfache Formel

38) $$\varphi_h = \varphi_0\left\{\alpha^h - (-\beta)^h\right\},$$

worin $\alpha = e^{-c\frac{T}{2}}$, $\beta = e^{-b\frac{T}{2}}$ ist.

Beobachtet wurden der 1te, 2te, 4te und 5te Umkehrpunkt; diese sind nach vorstehender Formel:

$$\varphi_1 = \varphi_0(\alpha+\beta), \quad \varphi_2 = \varphi_0(\alpha^2-\beta^2), \quad \varphi_4 = \varphi_0(\alpha^4-\beta^4), \quad \varphi_5 = \varphi_0(\alpha^5+\beta^5).$$

Bildet man hieraus die zwei Werthe

39) $$\varphi_{\mathrm{I}} = \varphi_1\beta + \varphi_2, \qquad \varphi_{\mathrm{II}} = \varphi_4\beta + \varphi_5,$$

welche, wenn kein Elektricitätsverlust stattfände, nach Division durch $1+\beta$ beide die gesuchte Ruhelage φ_0 ergeben würden, so werden dieselben jetzt

$$\varphi_{\mathrm{I}} = \varphi_0\alpha(\alpha+\beta), \qquad \varphi_{\mathrm{II}} = \varphi_0\alpha^4(\alpha+\beta),$$

und man findet aus ihnen

40) $$\alpha = \sqrt[3]{\frac{\varphi_{II}}{\varphi_I}}$$

und schliesslich

41) $$\varphi_0 = \frac{\varphi_I}{\alpha(\alpha + \beta)}.$$

Die Grösse β, welche das Dämpfungsverhältniss für Schwingungen um eine constante Ruhelage bedeutet, kann durch Beobachtung der Schwingungen des zur Erde abgeleiteten Elektrometers ein für alle Mal — oder wenigstens für denselben Beobachtungstag — bestimmt werden, während die Grösse α sich schneller verändern kann, und daher bei jedem einzelnen Versuch als Unbekannte zu behandeln und erst aus der Formel 40) zu berechnen ist.

Dass die Näherungsformel 38) den Verlauf der Schwingungen wirklich gut darzustellen vermochte, wurde zunächst durch einige Beobachtungsreihen, bei denen nach Belastung der Krystallplatte 10 aufeinanderfolgende Umkehrpunkte beobachtet wurden, festgestellt. Die beobachteten, und die mit den aus 39), 40), 41) ermittelten Werthen $\varphi_0 = 20{,}6$, $\alpha = 0{,}965$, $\beta = 0{,}68$ berechneten Umkehrpunkte (wie immer von der Nullstellung des Elektrometers aus gerechnet) waren:

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}
Beobachtet	33,7	9,55	25,1	13,1	20,5	14,5	17,7	14,5	15,9	14,2
Berechnet	33,95	9,7	25,1	13,5	20,2	14,6	17,4	14,55	15,6	14,0.

Der Werth $\beta = 0{,}68$ ist auch bei der Berechnung der eigentlichen Beobachtungen benutzt worden. Zur Ausführung der letzteren selbst ist noch zu bemerken, dass sowohl das Schliessen und Unterbrechen der Ableitung des Elektrometers zur Erde, als das Aufsetzen und Abheben der die Krystallplatte comprimirenden Gewichte durch Vermittelung von Fäden und Rollen vom Sitze des Beobachters aus geschah, wodurch allein es ermöglicht war, schon den ersten Umkehrpunkt zu beobachten. Es wurden immer abwechselnd bei Belastung und Entlastung (wobei aber immer noch eine constante Anfangsbelastung übrig blieb) die Ausschläge φ_1, φ_2, φ_4, φ_5 beobachtet, und zwischendurch jedesmal die Ruhelage des zur Erde abgeleiteten Elektrometers. Diese Ruhelage, auf welche als Nullpunkt stets die angegebenen Werthe φ bezogen sind, war meist constant; falls sie aber eine langsame Verschiebung zeigte, wurde dieselbe in Rechnung gezogen. Nach jeder solchen Beobachtungsreihe mit vier- bis fünfmaliger Belastung und Entlastung wurde der Commutator umgelegt, so dass die zuerst zur Erde abgeleitete Breitseite der Platte nun mit dem Elektrometer in Verbindung stand und umgekehrt, und nun eine analoge Reihe von Beobachtungen ausgeführt. Vorher und nachher wurde der einem Clarkelement entsprechende Ausschlag Φ beobachtet, welcher allmählich abnahm, wahrscheinlich weil sich mit der Zeit die Isolation des Elektrometers verschlechterte.

In den nachstehenden Tabellen sind angegeben die aus φ_1, φ_2, φ_4, φ_5 nach 39) abgeleiteten Werthe φ_{I} und φ_{II}, sodann die aus 40) berechnete Grösse α, welche ein Maass für die Elektricitätszerstreuung abgiebt, und endlich der aus 41) gefundene Werth φ_0, d. i. der Ausschlag, bei dem sich das Elektrometer im Falle vollkommener Isolation ruhig eingestellt haben würde. Ueber jeder Beobachtungsreihe ist ausser dem Ausschlag Φ für ein Clark noch angegeben, ob die mit einem Kreuz bezeichnete Krystallfläche ($F^{\times}$) oder die andere (F) mit dem Elektrometer verbunden war. Am Schluss steht jedesmal der Mittelwerth $\bar{\varphi}_0$ aus den absoluten Werthen der bei den einzelnen Versuchen gefundenen φ_0, sowie das daraus berechnete Verhältniss $\frac{\bar{\varphi}_0}{\Phi}$. Die über den einzelnen Columnen stehenden Buchstaben B und E geben an, ob die darunter stehenden Resultate bei Belastung oder Entlastung der Krystallplatte erhalten wurden.

Druckrichtung parallel den längeren Kanten ($L = 15{,}2$ mm).

Belastungsgewicht 1001,5 g.

$F^{\times}$ mit Elektrometer verbunden. $\Phi = 72{,}0$.

	B	E	B	E	B	E	B	E
φ_{I}	+ 35,2	− 36,2	34,5	35,6	34,9	35,7	34,9	35,9
φ_{II}	+ 30,45	− 32,6	30,4	31,8	31,1	32,4	30,6	32,4
α	0,953	0,965	0,958	0,962	0,962	0,968	0,957	0,966
φ_0	+ 22,68	− 22,80	+ 21,94	− 22,5	+ 22,1	− 22,4	+ 22,26	− 22,56

$$\bar{\varphi}_0 = 22{,}40, \quad \frac{\bar{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}311.$$

(Die Annahme gleichmässiger Abnahme des Potentials würde hier auf den Werth $\bar{\varphi}_0 = 21{,}7$ geführt haben).

F mit Elektrometer verbunden. $\Phi = 70{,}0$.

	B	B	E	B	E	B	E	B	E	B
φ_{I}	− 34,9	− 34,7	+ 35,65	34,3	35,35	34,5	35,6	34,5	35,65	34,75
φ_{II}	− 31,1	− 31,05	+ 31,2	30,8	31,55	30,6	31,5	31,6	31,4	29,75
α	0,962	0,964	0,956	0,965	0,963	0,961	0,964	0,971	0,958	0,950
φ_0	− 22,05	− 21,85	+ 22,80	− 21,60	+ 22,3	− 21,8	+ 22,4	− 21,5	+ 22,7	− 22,4

$$\bar{\varphi}_0 = 22{,}10, \quad \frac{\bar{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}316.$$

Wieder $F^{\times}$ mit Elektrometer verbunden. $\Phi = 64{,}7$.

	E	B	E	B	E	B	E	B
φ_{I}	−32,5	+32,7	32,4	32,6	32,4	32,75	32,6	32,55
φ_{II}	−30,0	+29,6	30,25	29,7	29,85	29,55	29,75	29,8
α	0,974	0,968	0,977	0,97	0,973	0,966	0,97	0,971
φ_0	−20,2	+20,5	−20,0	+20,35	−20,1	+20,6	−20,4	+20,3

$$\overline{\varphi}_0 = 20{,}31, \quad \frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}314.$$

Wieder F mit Elektrometer verbunden. $\Phi = 63{,}7$.

	B	E	B	E	B	E	B	E
φ_{I}	−32,1	+32,9	32,2	32,3	32,1	33,2	32,1	32,8
φ_{II}	−29,2	+30,1	29,1	29,5	29,5	29,55	29,5	29,9
α	0,968	0,971	0,968	0,97	0,972	0,962	0,972	0,97
φ_0	−20,1	+20,5	−20,15	+20,2	−20,0	+21,0	−20,0	+20,5

$$\overline{\varphi}_0 = 20{,}31, \quad \frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}3185.$$

Gesammtmittel aus diesen 4 Beobachtungsreihen: $\dfrac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = \mathbf{0{,}315}$.

Daraus berechnet nach 37): $\dfrac{c}{p} = \dfrac{0{,}315 \cdot 0{,}348 \cdot 0{,}478 \cdot 10^{-2}}{1001{,}5 \cdot 981 \cdot 1{,}52} \cdot C = \mathbf{0{,}03505 \cdot C \cdot 10^{-8}}$.

Druck parallel den kürzeren Kanten ($L = 13{,}55$ mm).

Belastungsgewicht 1000 g.

F mit Elektrometer verbunden. $\Phi = 63{,}25$.

	E	B	E	B	E	B	E	B	E	B
φ_{I}	−28,1	+28,25	27,55	27,6	27,2	27,4	28,0	27,8	27,7	27,7
φ_{II}	−25,3	+24,95	24,85	25,15	24,8	24,8	25,35	25,2	25,0	25,0
α	0,961	0,96	0,966	0,97	0,97	0,968	0,968	0,968	0,967	0,967
φ_0	−17,8	+17,9	−17,35	+17,25	−17,0	+17,2	−17,55	+17,3	−17,4	+17,4

$$\overline{\varphi}_0 = 17{,}42, \quad \frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}276.$$

$F^{\times}$ mit Elektrometer verbunden. $\Phi = 63{,}25$.

	E	B	E	B	E	B	E	B	E	B
φ_{I}	+28,0	−28,35	27,8	27,45	28,2	27,8	27,6	27,55	28,1	27,85
φ_{II}	+24,5	−25,45	24,6	24,9	24,45	24,9	24,8	25,0	25,1	24,9
α	0,957	0,964	0,96	0,968	0,954	0,964	0,966	0,968	0,963	0,963
φ_0	+17,9	−17,85	+17,65	−17,22	+18,1	−17,5	+17,35	−17,25	+17,74	−17,6

$$\overline{\varphi}_0 = 17{,}60, \quad \frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}278.$$

Platte 180° um Z^0 gedreht; F mit Elektrometer verbunden. $\Phi = 60{,}4$.

	E	B	E	B	E	B	E	B
φ_{I}	−27,9	+28,05	27,3	28,2	27,05	27,75	27,1	28,1
φ_{II}	−25,6	+25,6	24,75	25,9	24,75	25,45	24,6	25,5
α	0,972	0,97	0,968	0,972	0,971	0,972	0,968	0,968
φ	−17,4	+17,55	−17,1	+17,6	−16,85	+17,3	−17,0	+17,6

$$\overline{\varphi}_0 = 17{,}3, \quad \frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}286.$$

$F^{\times}$ mit Elektrometer verbunden, $\Phi = 60{,}0$.

	E	B	E	B	E	B	E	B
φ_{I}	+27,65	−26,7	27,2	27,2	27,3	26,9	27,35	27,3
φ_{II}	+25,25	−24,5	24,5	24,8	24,5	24,8	24,8	25,1
α	0,971	0,972	0,966	0,97	0,964	0,973	0,968	0,972
φ_0	+17,25	−16,6	+17,1	−17,0	+17,2	−16,7	+17,1	−17,0

$$\overline{\varphi}_0 = 17{,}0, \quad \frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}284.$$

Gesammtmittel aus diesen 4 Beobachtungsreihen: $\frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = \mathbf{0{,}281}$.

Daraus folgt nach 37): $\frac{c}{p} = \frac{-0{,}281 \cdot 0{,}348 \cdot 0{,}478 \cdot 10^{-2}}{1000 \cdot 981 \cdot 1{,}355} C = -\mathbf{0{,}03515}\, C \cdot 10^{-8}$.

Das Vorzeichen von $\frac{c}{p}$ ist hier negativ, wenn es bei der ersten Druckrichtung positiv angenommen wurde; denn im ersten Fall (bei Druck parallel den längeren Kanten) wurde durch Belastung der Platte die Fläche F positiv elektrisch (da positive Ausschläge des Elektrometers negativer Ladung entsprachen), bei der zweiten Druckrichtung dagegen die Fläche $F^{\times}$. Die vorstehende Vorzeichenbestimmung von c ist richtig, wenn man festsetzt, dass die positive Z^0-Axe aus der Fläche F austreten soll.

Wie zu Anfang dieses Paragraphen gezeigt wurde, müssen theoretisch die für beide Druckrichtungen erhaltenen Werthe von $\frac{c}{p}$ entgegengesetzt gleich sein; dies wird durch die vorstehenden Beobachtungsresultate sehr gut bestätigt.

Aus dem mittleren absoluten Werthe: $0{,}0351 \cdot C \cdot 10^{-8}$ ergiebt sich nach 37)

$$|\delta_{14}| = 0{,}0702 \cdot C \cdot 10^{-8}.$$

Für die Capacität des Elektrometers und der Verbindungsdrähte wurde gelegentlich der piëzoelektrischen Beobachtungen am Quarz, bei denen die Anordnung der Apparate genau die gleiche war, durch besondere, später mitzutheilende (aber früher ausgeführte) Versuche der Werth $C^0 = 66{,}2$ [cm] gefunden. Um C zu erhalten, ist noch die Capacität C' der mit Stanniol belegten Krystallplatte hinzuzufügen. Diese kann angenähert berechnet werden, indem man die letztere als ein Stück eines unendlich grossen Plattencondensators betrachtet. Dann wird, falls man die Dielektricitätsconstante des Natriumchlorates wieder $= 6$ annimmt,

$$C' = \frac{q' \cdot 6}{4\pi D} = \frac{1{,}52 \cdot 1{,}355 \cdot 6}{4\pi \cdot 0{,}348} = 2{,}82,$$

also

$$C = C^0 + C' = 69{,}0.$$

Demnach wird der absolute Werth des „piëzoelektrischen Moduls“

$$|\delta_{14}| = 4{,}84 \cdot 10^{-8},$$

d. i. ein Werth von derselben Grössenordnung, wie diejenigen für Quarz und Turmalin. Es bleibt jetzt noch das Vorzeichen von δ_{14} zu bestimmen bei derselben Verfügung über das Coordinatensystem, bei welcher oben das positive Vorzeichen von e_{41} ermittelt worden ist. Da die Lage der Tetraëderflächen an der Dodekaëderplatte nun nicht bekannt war, so muss diese Vorzeichenbestimmung indirect durch Vergleichung der piëzoelektrischen und elektrooptischen Beobachtungen an der Dodekaëderplatte geschehen. Besonders zu diesem Zwecke angestellte Versuche ergaben folgendes Resultat. — Es war die eine Breitseite durch einen parallel zur einen Kantenrichtung eingeritzten Pfeil ausgezeichnet; wir wollen festsetzen, dass aus dieser Breitseite die $+Z^0$-Axe austritt, und dass die bezeichnete Kantenrichtung X den Winkel $(+X^0, -Y^0)$ halbirt. Dies stimmt nämlich mit der früheren Vorzeichenbestimmung von e_{41} überein; denn es wurde bei negativer Ladung der bezeichneten Fläche, also positivem Moment c, in der den Winkel $(+X^0, +Y^0)$ halbirenden Richtung Y eine Verzögerung der parallel der Plattennormale Z^0 polarisirten Welle gegen die andere, parallel der Kantenrichtung X polarisirte Welle beobachtet, und nach der Theorie ist in diesem Falle $\omega_x^2 - \omega_z^2 = -e_{41} c$, also die erstere Welle in der That bei positivem c die langsamere. Das Ergebniss der piëzoelektrischen Beobachtung war nun, dass

die bezeichnete Fläche durch Druck parallel dem Pfeil, also parallel X, negativ elektrisch wurde, somit das erregte Moment c negativ war, wenn X_y einen negativen Werth hatte. Da aber der Theorie zufolge $c = -\delta_{14} X_y$ ist, so muss, damit die Vorzeichen von c und X_y übereinstimmen, δ_{14} negativ sein. Wir haben also bei der früheren Festlegung des Coordinatensystems (cf. S. 67—68) das Endresultat:

$$\delta_{14} = -\mathbf{4{,}84 \cdot 10^{-8}}.$$

Es wurden dann noch Messungen der piëzoelektrischen Erregung der früher beschriebenen „Octaëderplatte“ ausgeführt, welche zu einer Prüfung der Theorie dienen konnten.

Ist die Richtung des einseitigen Druckes p eine Octaëdernormale, — wir wollen annehmen die im ersten Octanten liegende — so ist

$$Y_z = Z_x = X_y = \tfrac{1}{3} p,$$

somit sind nach 25), § 1, die erregten Momente:

$$a = b = c = -\tfrac{1}{3} p \, \delta_{14}.$$

Das Gesammtmoment fällt folglich in die Druckrichtung und hat die Grösse:

$$m = -\frac{1}{\sqrt{3}} p \, \delta_{14}.$$

Um dieses Moment zu messen, wurde die Octaëderplatte zwischen zwei Metallplatten comprimirt, von denen die eine mit der Erde, die andere mit dem Elektrometer verbunden war. Dann findet man aus dem Elektrometerausschlage gerade wie früher die auf den Breitseiten der Platte entwickelte Elektricitätsmenge. Letztere ist hier aber unabhängig von den Dimensionen der Platte, da ja der Querschnitt q, auf den sich die Belastung P vertheilt, gleich der elektrisch geladenen Fläche q' ist; somit ist jene Elektricitätsmenge direct gleich dem Momente m für $p = 1$, und man erhält, wenn alle Grössen in absolutem Maass ausgedrückt werden, die Relation

$$\text{42)} \qquad \frac{m}{p} = -\frac{\delta_{14}}{\sqrt{3}} = \frac{\varphi_0}{\Phi} \cdot \frac{C}{P} \cdot 0{,}478 \cdot 10^{-2}.$$

Die Beobachtungsresultate sind folgende.

$$P = 1004 \text{ g.} \qquad \Phi = 42{,}25.$$

Fläche $F^{\times}$ mit dem El. verbunden.

	B	E	B	E	B	E	B	E	
φ_0	$-3{,}9$	$+3{,}5$	$-3{,}8$	$+3{,}6$	$-3{,}8$	$+3{,}6$	$-3{,}9$	$+3{,}7$;	$\overline{\varphi}_0 = 3{,}725$.

Fläche F mit dem El. verbunden.

	B	E	B	E	B	E	B	E	
φ_0	$+3{,}95$	$-3{,}45$	$+4{,}0$	$-3{,}4$	$+3{,}95$	$-3{,}5$	$+3{,}95$	$-3{,}6$;	$\overline{\varphi}_0 = 3{,}725$.

Also aus allen Beobachtungen: $\overline{\varphi}_0 = \mathbf{3{,}725}$, $\quad \frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = \mathbf{0{,}088}$.

Die Capacität C' war hier kleiner als früher, nämlich ungefähr $= \frac{6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}62}{0{,}26 \cdot 4\pi}$ $= 0{,}7$; dafür kam aber noch die Capacität der Metallplatten, auf welche der Druck ausgeübt wurde, hinzu, sodass man im Ganzen $C = 68$ wird setzen können (statt des Werthes 69 bei der Dodekaëderplatte). Dann erhält man nach 42):

$$\frac{m}{p} \text{ beobachtet: } = \mathbf{2{,}9 \cdot 10^{-8}},$$

$$\frac{m}{p} \text{ berechnet } = \frac{-\delta_{14}}{\sqrt{3}} = \mathbf{2{,}79 \cdot 10^{-8}}.$$

In Anbetracht der Kleinheit der beobachteten Ausschläge ist diese Uebereinstimmung ganz befriedigend.

In Betreff des Vorzeichens ist Folgendes zu bemerken. Nach den mitgetheilten Beobachtungen erhielt man bei Belastung negative Ausschläge, also positive Ladung, wenn die Fläche $F^{\times}$ mit dem Elektrometer verbunden war. Da nun nach der Bestimmung von δ_{14} das durch Druck parallel der im 1. Octanten liegenden Octaëdernormale entwickelte Moment ebenfalls positiv ist, so folgt, dass diese Octaëdernormale die äussere Normale der Fläche $F^{\times}$ der Octaëderplatte ist. Damit stimmen nun die elektrooptischen Beobachtungen an dieser Platte überein; denn wir waren durch diese am Schluss des § 3 ebenfalls zu dem Resultate gelangt, dass die Fläche $F^{\times}$ zur äusseren Normale die Octaëdernormale des ersten Octanten haben müsse. — Das Resultat, dass bei unserer Wahl des Coordinatensystems δ_{14} negativ ist, lässt sich nach dem Vorstehenden auch so aussprechen: es wird diejenige Fläche einer Octaëderplatte durch Druck positiv elektrisch, welche einer Tetraëderfläche des Krystalles zugekehrt ist. Wie in der Einleitung dieses Theiles erwähnt wurde, haben die Herren Hankel und Lindenberg sowie J. und P. Curie an tetraëdrischen Krystallen von $NaClO_3$ das entgegengesetzte, erstere dagegen an Krystallen mit vorherrschendem Würfel dasselbe Verhalten beobachtet.

§ 5. **Piëzooptische Beobachtungen.**

Wie wir schon in § 1 dieses Theiles (S. 32) sahen, braucht man von den Constanten $a_{11} - a_{12}$ und a_{44}, welche dem Ansatze 24) zufolge im Allgemeinen die durch Deformationen erzeugte Doppelbrechung regulärer Krystalle bestimmen, für den vorliegenden Zweck, d. h. die Berechnung der von der Deformation eines Natrium-

chloratkrystalles im elektrischen Felde herrührenden Doppelbrechung, nur die eine: a_{44} zu kennen, da in diesem Falle nach 26) nur Deformationen y_z, z_x, x_y auftreten. Aus den Formeln 24) lässt sich nun ableiten, dass $a_{44} s_{44}$ das Maass für den Gangunterschied ist, welcher in einem inactiven regulären Krystall in der Richtung einer Würfelnormale auftritt, wenn auf denselben einseitiger Druck parallel einer zu jener Würfelnormale senkrechten Dodekaëdernormale ausgeübt wird; es wird nämlich in diesem Falle[1])

$$\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{p v^2} = \frac{a_{44}}{v^2} s_{44},$$

wo ω_1 die Geschwindigkeit der parallel zur Druckrichtung, ω_2 diejenige der senkrecht zur Druckrichtung polarisirten Welle bezeichnet, und s_{44} die Bedeutung des Torsionsmoduls für die Torsion um eine Würfelnormale hat.

Besitzt der Krystall optisches Drehungsvermögen, so findet man durch Compensatorbeobachtungen in der Richtung der Würfelnormale nicht direct die der Geschwindigkeitsdifferenz $\omega_1 - \omega_2$ entsprechende relative Verzögerung, sondern zunächst die Grösse

$$x = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_r^{0^2} - \omega_l^{0^2}} = -\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{v^2} \frac{n_0^3 \pi}{\lambda \delta_0}.$$

Aus der Grösse x, welche man aus der beim Drucke p beobachteten Compensatorverstellung $\varDelta$ nach 33) berechnet hat, ergiebt sich dann

43) $$\frac{a_{44}}{v^2} s_{44} = -\frac{x}{p} \frac{\lambda \delta^0}{n_0^3 \pi}, \text{ oder für Na-Licht} = \mp \frac{x}{p} \cdot \frac{10^{-4}}{16{,}8},$$

wobei das obere Vorzeichen für einen linken, das untere für einen rechten Krystall gilt, immer unter der Voraussetzung, dass der Compensatorspalt zur Druckrichtung parallel ist.

Die hier vorausgesetzten Versuchsbedingungen sind nun erfüllt, wenn man die „Dodekaëderplatte" parallel einer ihrer langen Kanten, also ebenso wie bei den piëzoelektrischen Beobachtungen comprimirt und dabei auf der Breitseite der Platte, also in der Richtung Z^0, die Streifenverschiebung am in der gewöhnlichen Stellung befindlichen Compensator beobachtet. Bei den Beobachtungen, welche in dieser Weise ausgeführt wurden, stand die Krystallplatte unter einem Hebel in solcher Entfernung von dessen (zur Beobachtungsrichtung paralleler) Drehungsaxe, dass die Belastung P der Platte das 4,07-fache von derjenigen Q des Hebelendes war. Zum Ausgleich des auf die Schmalseiten der Platte wirkenden Druckes dienten Bleiplatten[2]). Die Nicols wurden in derselben Weise in Bezug auf die Plattenkanten orientirt, wie bei den elektrooptischen Beobachtungen.

Wie schon am Schlusse von § 2, *d*, S. 48 oben, bemerkt wurde, braucht bei diesen Beobachtungen die ursprünglich vorhandene (anomale) Doppelbrechung

1) Vergl. F. Pockels, Wied. Ann. **37**, 376—378. 1889.

2) Wegen der Versuchsanordnung im Einzelnen vergl. meine Arbeit in Wied. Ann. **37**.

nicht berücksichtigt zu werden, da die derselben entsprechenden „Schwingungsrichtungen“ bereits parallel und senkrecht zu der Druckrichtung liegen, wie sie es in der comprimirten Platte thun. Wir sahen ferner S. 60, dass die Formel 33) im vorliegenden Fall durch die lineare Relation

$$x = +0{,}704\,\Delta$$

ersetzt werden kann, wenn das beobachtete Δ nicht grösser ist als 1, was hier erfüllt war.

Nachstehende Tabellen enthalten die Compensatoreinstellungen, welche an 3 bis 5 verschiedenen Stellen der Platte (am linken Rand [L. Rd.], in der Mitte [M.] und am rechten Rand [R. Rd.], und ev. noch dazwischen) bei entlastetem, mit $Q = 2344$ g belastetem und wieder entlastetem Hebel erhalten wurden. Die einzelnen Zahlen sind Mittelwerthe aus je 5 bis 6 Einstellungen.

Druck parallel den 15,6 mm langen Kanten.

Erste Aufstellung.

	L. Rd.	M.	R. Rd.	
E	0,91	0,882	0,694	
B	0,05	0,262	0,042	
E	0,872	0,900	0,732	
Δ	– 0,841	– 0,629	– 0,671;	Mittel – 0,714.

Zweite Aufstellung.

	L. Rd.		M.		R. Rd.	
E	1,058	1,326	1,248	1,292	1,378	
B	0,310	0,774	0,468	0,648	0,724	
E	1,050	1,342	1,234	1,272	1,394	
Δ	–0,734	–0,560	–0,773	–0,634	–0,662;	Mittel –0,673.

Mittel aus beiden Beobachtungsreihen: $\Delta = -\mathbf{0{,}693}$;

$$\text{daraus } \frac{\Delta}{p} = -\frac{0{,}693 \cdot 15{,}15 \cdot 3{,}48}{2344 \cdot 4{,}07} = -\mathbf{3{,}83 \cdot 10^{-3}}.$$

Druck parallel den 15,15 mm langen Kanten.

Erste Aufstellung.

	L. Rd.		M.		R. Rd.	
E	1,544	1,774	1,950	1,642	1,842	
B	0,806	1,057	1,292	0,932	1,160	
E	1,572	1,776	1,930	1,640	1,818	
Δ	–0,752	–0,718	–0,648	–0,709	–0,670;	Mittel –0,70.

Zweite Aufstellung.

	L. Rd.		M.		R. Rd.
E	0,820	1,018	1,052	1,412	1,572
B	0,142	0,380	0,367	0,754	0,872
E	0,832	1,030	1,044	1,410	1,558
$\varDelta$	−0,684	−0,644	−0,681	−0,657	−0,693; Mittel −0,672.

Mittel aus beiden Reihen: $\varDelta = -\mathbf{0{,}686}$;

$$\text{daraus } \frac{\varDelta}{p} = -\frac{0{,}686 \cdot 15{,}6 \cdot 3{,}48}{2344 \cdot 4{,}07} = -\mathbf{3{,}90 \cdot 10^{-3}}.$$

Wenn auch die einzelnen Beobachtungen an verschiedenen Stellen der Platte in Folge der bei ihrer grossen Breite schwer zu vermeidenden Ungleichförmigkeit der Compression bisweilen stark differirten, so stimmen doch die Mittelwerthe gut überein und ergeben für beide Druckrichtungen nahe denselben Werth von $\frac{\varDelta}{p}$, wie es die krystallographische Symmetrie der Platte verlangt. Das Gesammtmittel ist

$$\frac{\varDelta}{p} = -3{,}865 \cdot 10^{-3},$$

und aus diesem Werthe folgt

$$\frac{x}{p} = -2{,}72 \cdot 10^{-3},$$

und schliesslich nach 43), wenn man berücksichtigt, dass die Dodekaëderplatte rechtsdrehend war,

$$\frac{a_{44}}{v^2} \cdot s_{44} = -\mathbf{1{,}62 \cdot 10^{-8}}.$$

Zum Vergleich sei angeführt, dass der entsprechende Werth für Steinsalz $-0{,}833 \cdot 10^{-8}$, für Sylvin $-4{,}22 \cdot 10^{-8}$ beträgt. —

In der zu prüfenden Relation 27) tritt aber nicht das Product $a_{44} s_{44}$, sondern die Constante a_{44} selbst auf, so dass man noch den Torsionsmodul s_{44} kennen muss. Dieser ist nun nach den Bestimmungen, welche Herr Voigt[1]) an Stäbchen, die aus einem der grössten Krystalle geschnitten waren, ausgeführt hat,

$$s_{44} = +0{,}821 \cdot 10^{-6},$$

falls ebenso, wie bei der obigen Berechnung von $\frac{a_{44} s_{44}}{v^2}$, Millimeter als Längeneinheit und Gramm als Krafteinheit gewählt werden. Demnach erhält man für

1) W. Voigt, Nachr. d. Ges. d. Wiss. Göttingen. 1893, 220—224.

die Constante $\frac{a_{44}}{v^2}$, welche eine reine Zahl ist, den Werth:

$$\frac{a_{44}}{v^2} = -\mathbf{0{,}0197}.$$

(Die Werthe derselben für Steinsalz und Sylvin sind bezw. $-0{,}0108$ und $-0{,}0276$.)

§ 6. Schlussfolgerung aus den gewonnenen Resultaten.

Nachdem der piëzoelektrische Modul δ_{14} und die piëzooptische Constante $\frac{a_{44}}{v^2}$ bestimmt worden ist, kann nunmehr aus der Formel 27) diejenige Constante $\frac{e'_{41}\varkappa}{v^2}$ berechnet werden, welche die Doppelbrechung im elektrischen Felde bestimmen würde, falls dieselbe aus der gleichzeitig stattfindenden Deformation ebenso wie aus einer gleichen, mechanisch erzeugten Deformation berechnet werden könnte.

Man findet

$$\frac{e'_{41}\varkappa}{v^2} = \delta_{14}\frac{a_{44}}{v^2} = +4{,}84 \cdot 0{,}0197 \cdot 10^{-8}$$
$$= +\mathbf{0{,}0955 \cdot 10^{-8}}.$$

Dagegen war der durch directe Beobachtungen gefundene Werth dieser elektrooptischen Constante (siehe § 3, c, B, S. 68):

$$\frac{e_{41}\varkappa}{v^2} = +\mathbf{1{,}19 \cdot 10^{-8}}.$$

Während also die Vorzeichen der beobachteten und berechneten Constanten übereinstimmen, differiren ihre absoluten Werthe ganz ausserordentlich, so zwar, dass die beobachtete elektrooptische Wirkung mehr als 12mal so gross ist, wie die aus der Deformation berechnete. Es kann demnach kein Zweifel sein, dass im Natriumchlorat die durch dielektrische Polarisation verursachte optische Wirkung verschieden ist von derjenigen, welche eine der dabei stattfindenden Deformation gleiche, durch mechanische Einwirkung hervorgebrachte Deformation verursachen würde, woraus zu schliessen ist, dass das elektrostatische Feld auf die Lichtbewegung im Natriumchlorat eine **directe** Wirkung ausübt.

III. Theil.

Quarz.

§ 1. Allgemeine Formeln.

Das Coordinatensystem soll ebenso festgelegt werden, wie es in der Untersuchung von Hrn. Voigt[1]) über die Elasticitätsverhältnisse des Quarzes zuerst geschehen und später in den Arbeiten über dessen piëzooptische[2]) und piëzoelektrische[3]) Constanten beibehalten worden ist, nämlich es sollen die Hauptaxe (dreizählige Symmetrieaxe) zur Z^0-Axe, eine zweizählige Symmetrieaxe zur X^0-Axe gewählt und deren positive Richtungen so angenommen werden, dass die $+Y^0$-Axe aus einer der um die $+Z^0$-Axe herum liegenden Flächen des positiven Rhomboëders austritt. Dann nimmt der allgemeine Ansatz 6) folgende specielle Form an[4]):

44)
$$\begin{gathered} B_{11} - \omega_o^{0^2} = e_{11}\, a, \qquad B_{22} - \omega_o^{0^2} = -e_{11}\, a, \qquad B_{33} - \omega_e^{0^2} = 0, \\ B_{23} = e_{41}\, a, \qquad B_{31} = -e_{41}\, b, \qquad B_{12} = -e_{11}\, b. \end{gathered}$$

Hieraus wären die Hauptaxen des veränderten Ovaloids mittelst der Formeln 3) und 4) abzuleiten und die Lichtgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 für eine gegebene Fortpflanzungsrichtung in bekannter Weise zu berechnen. Doch ist dabei wieder die Circularpolarisation zu berücksichtigen, also sind die Gleichungen 22) und 23) anzuwenden, wenigstens für Beobachtungen in Richtungen, die wenig von der Hauptaxe Z^0 abweichen. Sobald es sich aber um Richtungen handelt, welche unter Winkeln von mehr als 25^0 gegen die Hauptaxe geneigt sind, hat beim Quarz in Folge seiner natürlichen Doppelbrechung die Circularpolarisation keinen merklichen Einfluss mehr, d. h. die Wellen sind nicht von linearpolarisirten zu unterscheiden und folgen dem Huyghens'schen Gesetz für die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten. Für solche, hinreichend stark gegen die Axe Z^0 geneigte Beobachtungsrichtungen kann man also auch die modificirten Geschwindigkeiten ω_1, ω_2 direct aus den obigen B_{hk} berechnen, als ob es sich um einen inactiven Krystall handelte, und dementsprechend werden wir bei den Anwendungen im § 2 verfahren. Zu den Formeln 44) sei noch bemerkt, dass unter ω_o^0 der Mittelwerth aus den beiden ursprünglich in der Richtung der Hauptaxe stattfindenden Lichtgeschwindigkeiten ω_r^0 und ω_l^0 zu verstehen ist, während ω_e^0 die ursprüngliche ausserordentliche Hauptlichtgeschwindigkeit bezeichnet.

---

1) W. Voigt, Wied. Ann. **31**, 701. 1887.
2) F. Pockels, Wied. Ann. **37**, 161. 1889.
3) E. Riecke und W. Voigt, Wied. Ann. **45**, 525. 1892.
4) F. Pockels, N. Jahrb. f. Min. Beil. Bd. **7**, 210. 1890.

Die Aenderungen des optischen Verhaltens rhomboëdrischer und auch trapezoëdrisch-tetartoëdrischer Krystalle durch elastische Deformationen sind gegeben durch folgende Werthe der Grössen B_{hk}:[1])

45)
$$\left|\begin{aligned}
B_{11}-\omega_o^{0^2} &= a_{11}x_x+a_{12}y_y+a_{13}z_z+a_{14}y_z\\
B_{22}-\omega_o^{0^2} &= a_{12}x_x+a_{11}y_y+a_{13}z_z-a_{14}y_z\\
B_{33}-\omega_e^{0^2} &= a_{31}(x_x+y_y)+a_{33}z_z\\
B_{23} &= a_{41}(x_x-y_y)+a_{44}y_z\\
B_{31} &= a_{44}z_x+a_{41}x_y\\
B_{12} &= a_{14}z_x+\tfrac{1}{2}(a_{11}-a_{12})x_y.
\end{aligned}\right.$$

In Betreff der Berücksichtigung der Circularpolarisation bei der Anwendung dieser Formeln gilt das oben Gesagte, d. h. dieselbe kommt nur für die in der Nähe der Hauptaxe zu beobachtenden Erscheinungen in Betracht.

Der Voigt'sche Ansatz 7) für die piëzoelektrischen Momente nimmt für die Gruppe des Quarzes in Bezug auf das oben definirte Axensystem die Form an:

46)
$$\left|\begin{aligned}
a &= -\delta_{11}(X_x-Y_y)-\delta_{14}Y_z,\\
b &= +\delta_{14}Z_x+2\delta_{11}X_y,
\end{aligned}\right.$$

enthält also, wie die Formeln 44), nur 2 Constante.

Zufolge den Gleichungen 8) werden demnach die Deformationen in einem homogenen elektrischen Felde, welches die Momente a, b, c inducirt, folgende:

47)
$$\left|\begin{aligned}
x_x &= \delta_{11}\frac{a}{\varkappa_1}, \quad & y_y &= -\delta_{11}\frac{a}{\varkappa_1}, \quad & z_z &= 0,\\
y_z &= \delta_{14}\frac{a}{\varkappa_1}, \quad & z_x &= -\delta_{14}\frac{b}{\varkappa_1}, \quad & x_y &= -2\delta_{11}\frac{b}{\varkappa_1},
\end{aligned}\right.$$

worin $\varkappa_1$ die Inductionsconstante für Richtungen senkrecht zur Z^0-Axe bezeichnet.

Es sei hier erwähnt, dass von diesen Formeln diejenige für y_y durch directe Messungen der Dilatation im elektrischen Felde, welche J. und P. Curie[2]) an dünnen Quarzplatten ausgeführt haben, sehr gute Bestätigung gefunden hat.

Aus den piëzoelektrischen Modulen δ_{11}, δ_{14} und den piëzooptischen Constanten setzen sich nun diejenigen Werthe e'_{11}, e'_{41}, welche die elektrooptischen Constanten im Falle lediglich indirecter, d. h. aus den Deformationen 47) nach 45) zu berechnender elektrooptischer Wirkung haben müssen, nach den allgemeinen Gleichungen 9) folgendermaassen zusammen:

---

1) Vergl. meine schon citirte Abhandlung in Wied. Ann. **37**.

2) J. u. P. Curie, Journ. de phys. (2) VIII, 149. 1889. Vergl. auch Th. Liebisch, Physikalische Krystallographie, Leipzig 1891, p. 277—280.

48)
$$e'_{11} = \frac{1}{\varkappa_1}\{\delta_{11}(a_{11} - a_{12}) + \delta_{14} a_{14}\},$$
$$e'_{41} = \frac{1}{\varkappa_1}\{2\delta_{11} a_{41} + \delta_{14} a_{44}\}.$$

Schliesslich seien noch die Relationen zwischen den elastischen Drucken und Deformationsgrössen, von denen bei der experimentellen Bestimmung der a_{hk} Anwendung zu machen ist, angeführt; sie lauten für die trapezoëdrische Tetartoëdrie des hexagonalen Systems wie folgt:

49)
$$\begin{aligned}
x_x &= -\{s_{11} X_x + s_{12} Y_y + s_{13} Z_z + s_{14} Y_z\}\\
y_y &= -\{s_{12} X_x + s_{11} Y_y + s_{13} Z_z - s_{14} Y_z\}\\
z_z &= -\{s_{13}(X_x + Y_y) + s_{33} Z_z\}\\
y_z &= -\{s_{14}(X_x - Y_y) + s_{44} Y_z\}\\
z_x &= -\{s_{44} Z_x + 2 s_{14} X_y\}\\
x_y &= -\{2 s_{14} Z_x + 2(s_{11} - s_{12}) X_y\}.
\end{aligned}$$

§ 2. Theorie der beobachteten elektrooptischen Erscheinungen.

Zur experimentellen Bestimmung der Constanten e_{11} und e_{41} reicht es aus, die optischen Aenderungen zu beobachten, welche bei dielektrischer Polarisation parallel der X^0- und Y^0-Axe eintreten. Bei der vorliegenden Untersuchung kamen daher nur diese 2 speciellen Elektrisirungsrichtungen zur Anwendung, was mir um so mehr ausreichend schien, als über die Lage der optischen Symmetrieaxen und die relative Grösse der Gangunterschiedsänderungen bei anderen Elektrisirungsrichtungen in der $X^0 Y^0$-Ebene bereits Beobachtungen von Herrn P. Czermak vorliegen, welche die aus den Formeln 44) zu ziehenden Folgerungen bestätigen[1]). — Die Abweichungen der Richtung der Kraftlinien von der X^0- oder Y^0-Axe, welche bei den Beobachtungen infolge fehlerhafter Orientirung der untersuchten Platten vorkamen, waren so gering, dass sie nicht berücksichtigt zu werden brauchen (überdies wären Abweichungen innerhalb der $X^0 Y^0$-Ebene gar nicht so genau nachweisbar gewesen, dass sich eine Correctionsrechnung dieserhalb verlohnt hätte).

a. Kraftlinien parallel X^0.

Hier ist a = dem Gesammtmoment m, $b = 0$, folglich nach 44):
$$B_{11} - \omega_o^{0^2} = -(B_{22} - \omega_o^{0^2}) = e_{11} m, \qquad B_{33} - \omega_e^{0^2} = 0,$$
$$B_{23} = e_{41} m, \qquad B_{31} = B_{12} = 0.$$

1) P. Czermak, Sitzungsber. d. Wiener Akad. **97** (2) 301—324. 1888. Eine Vergleichung der Resultate Czermaks mit meiner allgemeinen Theorie habe ich im N. Jahrb. f. Min. Beil. Bd. **7**, 218, 1890, gegeben.

Da B_{31} und B_{12} verschwinden, so besteht die Richtungsänderung der optischen Symmetrieaxen nur in einer Drehung um die X^0-Axe und zwar um einen Winkel Φ_x, welcher, positiv gerechnet, wenn die neue Symmetrieaxe Y von Y^0 aus gegen Z^0 hin gedreht ist, gegeben ist durch[1])

$$\operatorname{tg} 2\Phi_x = \frac{2B_{23}}{B_{22}-B_{33}}.$$

Da nun die Aenderungen der Doppelbrechung im elektrischen Felde sehr klein sind gegen die ursprüngliche Doppelbrechung, also auch B_{23} sehr klein ist gegen $\omega_o^{0^2} - \omega_e^{0^2}$, so kann die Tangente oder der Sinus des Winkels Φ_x mit dem Winkel selbst vertauscht und im Nenner des vorstehenden Ausdruckes $e_{11} m$ neben $\omega_o^{0^2} - \omega_e^{0^2}$ vernachlässigt werden, so dass man erhält

50) $$\Phi_x = \frac{e_{41} m}{\omega_o^{0^2} - \omega_e^{0^2}}.$$

Demgemäss werden die Richtungscosinus der Symmetrieaxen X, Y, Z bis auf Grössen zweiter Ordnung:

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_2 = \gamma_3 = 1, \quad \beta_1 = \gamma_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \quad \beta_3 = -\gamma_2 = \Phi_x,$$

und die Gleichungen 4) für die neuen Hauptlichtgeschwindigkeiten ergeben mit derselben Annäherung:

50') $$\omega_x^2 = \omega_o^{0^2} + e_{11} m, \quad \omega_y^2 = \omega_o^{0^2} - e_{11} m, \quad \omega_z^2 = \omega_e^{0^2}.$$

Wir wollen nun sehen, wie auf Grund dieser Formeln die Grössen e_{11} und e_{41} durch Compensatorbeobachtungen, sowie die erstere auch durch Messung der Durchmesser der in der Richtung der Hauptaxe im convergenten Lichte beobachtbaren Interferenzcurven ermittelt werden können.

I. Compensatorbeobachtungen parallel Y^0 oder den Halbirungslinien der Winkel (Y^0, Z^0) und $(-Y^0, Z^0)$.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in der Richtung Y^0 oder einer sehr wenig davon abweichenden unterscheiden sich von ω_x und ω_z nur um Grössen zweiter Ordnung, wenn $e_{11} m$ und $e_{41} m$ als solche erster Ordnung betrachtet werden. Compensatormessungen in der Beobachtungsrichtung Y^0, bei denen der Compensatorspalt parallel zu X^0 gerichtet ist, liefern demnach nach Gl. 11) die Grösse

$$\Delta_1 = \frac{L^0}{2\lambda} \left\{ \frac{+e_{11} m}{v^2} n_o^{0^3} + 2\frac{L-L^0}{L^0}(n_e^0 - n_o^0) \right\}.$$

Die Aenderung der Dicke des Krystalles in der Beobachtungsrichtung ist $L - L^0 = L^0 y_y$, und dabei ist y_y die durch 47) gegebene Dilatation in Folge der

1) Vergl. F. Pockels, Wied. Ann. 37, p. 156.

dielektrischen Polarisation $a = m$, $b = c = 0$, also gleich $-\delta_{11}\frac{m}{\varkappa_1}$. Daher kann man obigen Ausdruck schreiben:

$$\bar{\varDelta}_1 = \frac{L^0}{\lambda}\frac{m}{\varkappa_1}\left\{\frac{n_o^{0^3}}{2}\cdot\frac{e_{11}\varkappa_1}{v^2} + \delta_{11}(n_o^0 - n_e^0)\right\}, \tag{51}$$

worin $\frac{m}{\varkappa_1}$ das negative Potentialgefälle innerhalb des Krystalles in der Richtung $+X^0$ ist. Es sei daran erinnert, dass $\bar{\varDelta}$, die wirklich stattfindende relative Verzögerung in Wellenlängen, mit der beobachteten Anzahl $\varDelta$ von Umdrehungen der Compensatorschraube in dem Zusammenhang steht, dass $\bar{\varDelta} = -\frac{\varDelta}{23,8}$ ist, vorausgesetzt die Anwendung von Natriumlicht. Wird mit einer anderen Lichtsorte beobachtet, so ändert sich der Streifenabstand im Compensator d (= 23,8 für Na-Licht) in demselben Verhältniss wie λ, und da bei der Berechnung des Klammerausdruckes in 51) schliesslich nur das Verhältniss $\frac{\lambda}{d}$ auftritt, so kann man, auch wenn $\varDelta$ mit anderem Licht beobachtet wurde, doch immer die für Na-Licht geltenden Werthe $d = 23,8$ und $\lambda = 589,2\cdot 10^{-6}$ einsetzen; so wird später bei Berechnung der mit „weissem Licht" angestellten Beobachtungen verfahren werden.

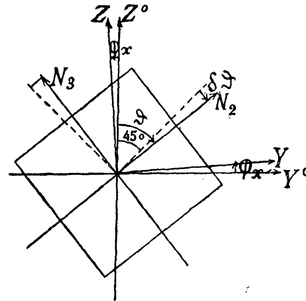


Fig. 7.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in einer Richtung N, die in der Y^0Z^0-Ebene liegt und mit der Z^0-Axe den Winkel ϑ, positiv gerechnet gegen die $+Y^0$-Axe hin, mit der Z-Axe also den Winkel $\vartheta + \Phi_x$ bildet (vergl. Fig. 7), sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= \omega_z^2\sin^2(\vartheta+\Phi_x) + \omega_y^2\cos^2(\vartheta+\Phi_x)\\ &= \omega_e^{0^2}\sin^2\vartheta + \omega_o^{0^2}\cos^2\vartheta + (\omega_e^{0^2}-\omega_o^{0^2})\,\Phi_x\sin 2\vartheta + (\omega_y^2-\omega_o^{0^2})\cos^2\vartheta,\\ \omega_2^2 &= \omega_x^2,\end{aligned}$$

oder mit Berücksichtigung der Formeln 50) und 50′)

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= \omega_e^{0^2}\sin^2\vartheta + \omega_o^{0^2}\cos^2\vartheta - e_{41}m\sin 2\vartheta - e_{11}m\cos^2\vartheta,\\ \omega_2^2 &= \omega_o^{0^2} + e_{11}m.\end{aligned}$$

Bei den Beobachtungen sollte der Winkel $\vartheta = \pm 45^0$ sein; um aber gleich die Orientirungsfehler zu berücksichtigen, wollen wir ihn $= +45^0 + \delta\vartheta$ bezw. $-45^0 + \delta\vartheta$ annehmen. Dann erhält man

$$\begin{aligned}\omega_2^2 - \omega_2^{0^2} &= e_{11}m \text{ in beiden Fällen},\\ \omega_1^2 - \omega_1^{0^2} &= -e_{41}m - e_{11}m(\tfrac{1}{2} - \delta\vartheta) \text{ für } \vartheta = +45^0 + \delta\vartheta,\\ &= +e_{41}m - e_{11}m(\tfrac{1}{2} + \delta\vartheta) \;\;„\;\; \vartheta = -45^0 + \delta\vartheta.\end{aligned}$$

Um die relative Verzögerung berechnen zu können, ist noch die Dickenzunahme $L-L^0$ in der Beobachtungsrichtung zu bestimmen, wobei jedoch $\vartheta = \pm 45^0$ gesetzt werden kann. Dieselbe ist allgemein $L^0(\frac{1}{2}y_y + \frac{1}{2}z_z \pm \frac{1}{2}y_z)$, oder, da hier zufolge 47) die speciellen Werthe

$$y_y = -\delta_{11}\frac{m}{\varkappa_1}, \qquad z_z = 0, \qquad y_z = +\delta_{14}\frac{m}{\varkappa_1}$$

gelten,

$$L-L^0 = L^0\cdot\tfrac{1}{2}\frac{m}{\varkappa_1}(-\delta_{11}+\delta_{14}) \text{ für } \vartheta = +45^0,$$

$$L-L^0 = L^0\cdot\tfrac{1}{2}\frac{m}{\varkappa_1}(-\delta_{11}-\delta_{14}) \quad „ \quad \vartheta = -45^0.$$

Ferner sind die Brechungsindices n_1^0 und n_2^0 (ersterer wenigstens sehr annähernd):

$$n_1^0 = \tfrac{1}{2}(n_o^0 + n_e^0) = n_m, \qquad n_2^0 = n_o^0.$$

Nach Einsetzung aller vorstehend gefundenen Ausdrücke in 11) findet man für die mit dem Compensator in den Beobachtungsrichtungen N_2 ($\vartheta = 45 + \delta\vartheta$) und N_3 ($\vartheta = -45 + \delta\vartheta$) messbaren relativen Verzögerungen:

52) $$\bar{\varDelta}_2 = \frac{L^0}{\lambda}\frac{m}{\varkappa_1}\left\{\frac{e_{11}\varkappa_1}{v^2}\left(\frac{n_o^{0^3}}{2} + \frac{n_m^3}{2}(\tfrac{1}{2}-\delta\vartheta)\right) + \frac{e_{41}\varkappa_1}{v^2}\frac{n_m^3}{2} + \tfrac{1}{4}(n_o^0 - n_e^0)(\delta_{11}-\delta_{14})\right\},$$

53) $$\bar{\varDelta}_3 = \frac{L^0}{\lambda}\frac{m}{\varkappa_1}\left\{\frac{e_{11}\varkappa_1}{v^2}\left(\frac{n_o^{0^3}}{2} + \frac{n_m^3}{2}(\tfrac{1}{2}+\delta\vartheta)\right) - \frac{e_{41}\varkappa_1}{v^2}\frac{n_m^3}{2} + \tfrac{1}{4}(n_o^0 - n_e^0)(\delta_{11}+\delta_{14})\right\}.$$

Bei Vernachlässigung der Correctionen wegen der Dickenänderung und des Orientirungsfehlers, sowie der Verschiedenheit von n_o^3 und n_m^3, wird $\bar{\varDelta}_2$ proportional mit $(\frac{3}{2}e_{11} + e_{41})$, $\bar{\varDelta}_3$ mit $(\frac{3}{2}e_{11} - e_{41})$, so dass dann die Summe beider Grössen $3e_{11}$, die Differenz $2e_{41}$ liefert. Jedenfalls würde die Bestimmung von $\bar{\varDelta}_2$ und $\bar{\varDelta}_3$ allein zur Berechnung von e_{11} und e_{41} ausreichen.

Die in den Formeln 51)—53) vorkommenden Brechungsindices haben für Natriumlicht die Werthe: $n_o^0 = 1{,}5442$, $n_e^0 = 1{,}5533$, $n_m = 1{,}5488$, und dementsprechend ist

$$\frac{n_o^{0^3}}{2} = 1{,}841, \quad \frac{n_e^{0^3}}{2} = 1{,}874, \quad \frac{n_m^3}{2} = 1{,}858, \quad n_o^0 - n_e^0 = -0{,}0091.$$

Bei Beobachtungen in Richtungen nahe parallel der Hauptaxe kommt, wie schon hervorgehoben, die Circularpolarisation zur Geltung und superponirt sich der ohne Rücksicht auf sie berechneten Doppelbrechung in derselben Weise, wie es beim Natriumchlorat erörtert wurde; nur ist diese Doppelbrechung hier zum weitaus grössten Theil bereits im natürlichen Zustande des Krystalles vorhanden, wo sie dem Huyghens'schen Gesetz folgt. Für die Richtung der Hauptaxe selbst ist $\omega_1^2 - \omega_2^2 = \omega_x^2 - \omega_y^2 = 2e_{11}m$, die Differenz der Geschwindigkeitsquadrate also $\pm\sqrt{(\omega_r^{0^2} - \omega_l^{0^2})^2 + (2e_{11}m)^2}$. Compensatorbeobachtungen genau in der Richtung Z^0

würden nach der Formel 33) eine Grösse $x = \frac{\pm 2 e_{11} m}{\omega_r^{0^2} - \omega_l^{0^2}}$ liefern. Dieser Grösse ist, wie wir früher sahen (vergl. die Näherungsformel 33'), die beobachtete Compensatorverschiebung $\varDelta$ nahezu proportional, wobei der Proportionalitätsfactor von der Weglänge L der Lichtstrahlen im Krystall abhängt, aber derart, dass er durch Vergrösserung derselben nicht wesentlich vergrössert werden kann, sondern schliesslich sogar wieder abnimmt. Da nun das Drehungsvermögen $\frac{1}{2}\delta^0$ des Quarzes in der Richtung der Hauptaxe fast 7 mal so gross ist, wie dasjenige des Natriumchlorats, so ist bei gleich starker elektrooptischer Wirkung x und folglich auch $\varDelta$ beim Quarz etwa 7mal kleiner, als beim Natriumchlorat. Daher können die Compensatorstreifen bei Beobachtung parallel Z^0 nur eine sehr geringe Verschiebung erfahren, welche auch durch Vergrösserung der Plattenlänge L nicht wesentlich gesteigert werden kann. In der That konnte an einer 59,9 mm langen Platte in einem starken elektrischen Felde kaum eine Verschiebung wahrgenommen werden.

Compensatorbeobachtungen in der Richtung der Hauptaxe sind demnach ungeeignet zur Bestimmung des Gangunterschiedes bezw. der Constante e_{11}. Dagegen konnte hierzu die Beobachtung der Aenderung der im convergenten homogenen Lichte sichtbaren Interferenzcurven dienen, wie im Folgenden gezeigt werden soll.

II. Beobachtung der Interferenzringe um die Hauptaxe.

Eine Quarzplatte, welche von zwei zur Hauptaxe Z^0 senkrechten ebenen Flächen begrenzt wird, zeigt im convergenten homogenen Lichte zwischen gekreuzten Nicols dunkle Interferenzkreise, deren Winkelhalbmesser Θ sich durch die Gleichung

$$\frac{L\delta^0}{2\cos\vartheta}\sqrt{1 + k^{0^2}\sin^4\vartheta} = h\pi, \text{ wo } h = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \text{ ist,}$$

bestimmen, wenn ϑ der entsprechende Winkel im Innern des Krystalles, also gleich $\arcsin\left(\frac{1}{n_o^0}\sin\Theta\right)$, L die Dicke der Platte (parallel Z^0 gerechnet), $\frac{\delta^0}{2}$ wie früher das specifische Drehungsvermögen, und k^0 eine Constante, nämlich der Quotient $\frac{\omega_o^{0^2} - \omega_e^{0^2}}{\omega_l^{0^2} - \omega_r^{0^2}}$ ist, welcher für Natriumlicht den numerischen Werth 126,5 besitzt. Wird nun der Krystall durch äussere Einwirkung — einseitigen Druck oder dielektrische Polarisation senkrecht zur Hauptaxe — optisch zweiaxig mit einem Axenwinkel 2Ω, so werden die Interferenzringe zu Lemniscaten deformirt, deren Gleichung ist[1]):

$$\frac{L\delta^0}{2\cos\vartheta}\sqrt{1 + \left(\frac{x\sin u\sin v}{\sin^2\Omega}\right)^2} = h\pi \qquad (h = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

1) Vergl. hierzu F. Pockels, Wied. Ann. **37**, 295—97. 1889.

worin ϑ wieder den Winkel zwischen der Wellennormale im Krystall und der Z^0-Axe, u, v die Winkel zwischen ersterer und den beiden optischen Axen bezeichnen, und x die frühere Bedeutung: $\pm \frac{\omega_y^2-\omega_z^2}{\omega_l^{0^2}-\omega_r^{0^2}}$ besitzt. Da $\sin^2\Omega = \frac{\omega_y^2-\omega_x^2}{\omega_y^2-\omega_z^2}$ oder $= \frac{\omega_x^2-\omega_y^2}{\omega_x^2-\omega_z^2}$ ist, je nachdem ω_y oder ω_x die grösste Hauptlichtgeschwindigkeit bedeutet, so ist $\frac{x}{\sin^2\Omega}$ entweder $= \frac{\omega_y^2-\omega_z^2}{\omega_l^{0^2}-\omega_r^{0^2}}$ oder $= \frac{\omega_x^2-\omega_z^2}{\omega_l^{0^2}-\omega_r^{0^2}}$, also, da $\omega_x^2-\omega_z^2$ und $\omega_y^2-\omega_z^2$ sich von $\omega_o^{0^2}-\omega_l^{0^2}$ verhältnissmässig sehr wenig unterscheiden, jedenfalls eine von k^0 sehr wenig verschiedene Grösse k.

Für die Messung kommen nur der grösste und kleinste Durchmesser der Lemniscaten in Betracht. Man misst zwar nicht direct ϑ, sondern den entsprechenden Winkel $\Theta = \arcsin(n_o^0 \sin\vartheta)$ ausserhalb des Krystalles; aber es kommt offenbar zunächst nur darauf an, ϑ zu berechnen.

Für den grössten Durchmesser, also denjenigen parallel der Ebene der optischen Axen, ist

$$u = \vartheta - \Omega, \qquad v = \vartheta + \Omega, \qquad \sin u \sin v = \sin^2\vartheta - \sin^2\Omega.$$

Setzt man noch

$$\frac{2\pi}{L\delta^0} = c,$$

welche Grösse für die gegebene Platte als constant betrachtet werden kann und im Falle der dielektrischen Polarisation streng constant ist, weil dieselbe keine Dilatation z_z erzeugt, so erhält man für die den grössten Ringdurchmessern entsprechenden Winkel ϑ_h die Gleichung

$$k^2(\sin^2\vartheta_h - \sin^2\Omega)^2 = h^2c^2 - 1 - h^2c^2\sin^2\vartheta_h,$$

oder, da $k\sin^2\Omega = x$ ist,

54) $$k\sin^2\vartheta_h - x = \sqrt{(hc\cos\vartheta_h)^2 - 1}.$$

Für den kleinsten Durchmesser gilt, wenn ϑ' der entsprechende Winkel gegen Z^0 im Krystall ist,

$$u = v, \quad \cos^2 u = \cos^2\vartheta' \cos^2\Omega,$$
$$\sin u \sin v = \sin^2\Omega \cos^2\vartheta' + \sin^2\vartheta',$$

also erhält man die Gleichung:

54') $$k\sin^2\vartheta_h' + x\cos^2\vartheta_h' = \sqrt{(hc\cos\vartheta_h')^2 - 1}.$$

Was die dem h beizulegenden ganzzahligen Werthe betrifft, so sind dieselben, wenn g die grösste in $\frac{1}{c} = \frac{L\delta^0}{2\pi}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet:

$$h = g+1 \text{ für den } 1^{\text{ten}}, = g+2 \text{ für den } 2^{\text{ten}} \text{ Ring u.s.w.}$$

Es hängt also von der Dicke der Platte ab, mit welcher Zahl die Reihe der h beginnt; der Anfangswerth 1 wird nur dann zulässig sein, wenn $L < \frac{2\pi}{\delta^0}$, d. i. im Falle von Natriumlicht kleiner als $\frac{180}{21{,}67} = 8{,}3$ mm ist. — Die Formeln 54) und 54′) gelten, wie noch einmal hervorgehoben sei, nur für den Fall gekreuzter Nicols, wobei deren Polarisationsebenen übrigens aber beliebig gegen die Ebene der optischen Axen des Krystalles orientirt sein können.

Wir wollen sie nun anwenden auf den Fall, dass die Zweiaxigkeit durch dielektrische Polarisation parallel der X^0-Axe erzeugt ist. Dann ist nach 50′)

$$\omega_x^2 = \omega_o^{0^2} + e_{11} m, \qquad \omega_y^2 = \omega_o^{0^2} - e_{11} m, \qquad \omega_z^2 = \omega_e^{0^2},$$

also

$$\omega_y^2 - \omega_z^2 = \omega_o^{0^2} - \omega_e^{0^2} - e_{11} m = \omega_o^{0^2} - \omega_e^{0^2} + \tfrac{1}{2}(\omega_y^2 - \omega_x^2),$$
$$\omega_x^2 - \omega_z^2 = \omega_o^{0^2} - \omega_e^{0^2} + e_{11} m = \omega_o^{0^2} - \omega_e^{0^2} - \tfrac{1}{2}(\omega_y^2 - \omega_x^2),$$

und, wenn man unter x den absoluten Werth von $\frac{2e_{11} m}{\omega_l^{0^2} - \omega_r^{0^2}}$ versteht und auch k und k^0 absolut rechnet:

$$k = k^0 + \tfrac{1}{2} x.$$

Setzt man diesen Werth ein, so gehen die Gleichungen 54) und 54′), in denen der Quadratwurzel ebenfalls stets der absolute Werth beizulegen ist, über in

55) $$x(1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\vartheta_h) = k^0 \sin^2\vartheta_h - \sqrt{(hc\cos\vartheta_h)^2 - 1},$$

55′) $$x(1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\vartheta_h') = -k^0 \sin^2\vartheta_h' + \sqrt{(hc\cos\vartheta_h')^2 - 1},$$

während zugleich für die ursprünglichen Ringhalbmesser die Gleichung gilt:

56) $$0 = k^0 \sin^2\vartheta_h^0 - \sqrt{(hc\cos\vartheta_h^0)^2 - 1}.$$

Diese letztere kann zur Berechnung von c dienen, oder wenigstens zur Controlle des aus der Dicke L nach der Formel $c = \frac{2\pi}{L\delta^0}$ berechneten Werthes dieser Grösse. Die Formeln 55) und 55′) zur Berechnung von x lassen sich nun in eine bequemere Form, in welcher sie die direct beobachteten Aenderungen der Ringdurchmesser enthalten, bringen, wenn man berücksichtigt, dass die bei den Beobachtungen in Betracht kommenden Winkel ϑ, umsomehr aber ihre Aenderungen $\vartheta - \vartheta^0$ und $\vartheta^0 - \vartheta'$, sehr klein sind. Man kann dann nämlich für jeden Ring $\sqrt{(hc\cos\vartheta)^2 - 1}$ als constant $= \sqrt{(hc\cos\vartheta^0)^2 - 1} = k^0 \sin^2\vartheta^0$ betrachten, ebenso $1 - \frac{1}{2}\sin^2\vartheta$ immer $= 1 - \frac{1}{2}\sin^2\vartheta^0 = \cos\vartheta^0$ setzen und erhält:

aus 55) $$x = \frac{k^0(\sin^2\vartheta_h - \sin^2\vartheta_h^0)}{\cos\vartheta_h^0},$$

aus 55′)
$$x = \frac{k^0 (\sin^2 \vartheta_h^0 - \sin^2 \vartheta_h')}{\cos \vartheta_h^0},$$

und durch Addition dieser beiden Ausdrücke:

$$x = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{k^0 (\sin^2 \vartheta_h - \sin^2 \vartheta_h')}{\cos \vartheta_h^0}.$$

Führt man nun die direct (in Luft) beobachteten Winkel Θ_h, Θ_h', Θ_h^0 ein, d.h. die beobachteten grössten, kleinsten und ursprünglichen Winkelhalbmesser der Interferenzcurven, so wird die letzte Gleichung:

57)
$$x = \frac{\tfrac{1}{2} k^0 (\sin^2 \Theta_h - \sin^2 \Theta_h')}{n_o^{0^2} - \tfrac{1}{2} \sin^2 \Theta_h^0},$$

wofür man annähernd auch schreiben kann:

57′)
$$x = \frac{k^0 \sin \Theta_h^0}{n_o^{0^2}} \cdot (\Theta_h - \Theta_h').$$

Wie weit, d.h. bis zu welchem Ringe diese Näherungsformel noch anwendbar ist, hängt von der Dicke der Platte ab; bei der zu den elektrooptischen Beobachtungen dienenden Platte, für die $L = 59{,}9$ mm war, konnte sie auf den dritten Ring noch mit genügender Annäherung angewendet werden. Die Ringdurchmesser Θ und Θ' konnten dabei nacheinander in derselben Richtung — parallel Y^0 — gemessen werden, indem das Vorzeichen der Elektrisirung bei gleicher Stärke umgekehrt wurde; denn die Ebene der optischen Axen und somit der grösste Ringdurchmesser ist, wie aus 50′) hervorgeht, parallel oder senkrecht zu den Kraftlinien, je nachdem $e_{11} m$ positiv oder negativ ist. Demnach kann die in 57′) vorkommende Grösse $\Theta_h - \Theta_h'$ als Aenderung des Ringhalbmessers beim Umkehren des Vorzeichens der elektrischen Ladung bequem beobachtet werden; die Anordnung, durch welche dies ausgeführt wurde, wird an späterer Stelle beschrieben werden.

Hat man die Grösse x aus 57′) berechnet, so findet man die Constante e_{11} bezw. $\frac{e_{11} \varkappa_1}{v^2}$ dem absoluten Werthe nach aus

58)
$$\frac{|e_{11}| \varkappa_1}{v^2} = \frac{\lambda \delta^0}{2 \pi n_o^{0^3}} \cdot \frac{x}{\partial V / \partial n}.$$

Das Vorzeichen lässt sich wie oben angegeben aus der Lage des längsten Ringdurchmessers bei bestimmtem Vorzeichen von m bestimmen.

Während bei meinen später mitzutheilenden Beobachtungen die Winkel Θ selbst gemessen wurden, hat Herr Czermak in der mehrfach citirten Arbeit die Aenderungen des scheinbaren, d.h. auf einen Glasmaassstab projicirten Ringdurchmessers beobachtet und dieselben in relativem Maass, nämlich ausgedrückt in Theilen des Durchmessers d selbst, angegeben. Es war nach seinen Beobach-

tungen der Mittelwerth aus der relativen Ringerweiterung und Verengerung

$$\frac{\delta d}{d} = 0{,}000387 \cdot \frac{\partial V}{\partial n}.$$

Nun folgt aus der Formel 57') annähernd:

$$\frac{\delta d}{d} = \frac{\Theta_h - \Theta_h'}{2 \sin \Theta_h^0} = \frac{\frac{1}{2} x}{\sqrt{h^2 c^2 - 1}};$$

um also x aus $\frac{\delta d}{d}$ berechnen zu können, muss man hc, somit die Dicke der Platte genau kennen. Diese giebt nun Herr Czermak nicht an; nach seinen Bemerkungen über die Herstellung der benutzten Platten scheint sie aber etwa 2 cm betragen zu haben. Dann würde für den ersten Ring, auf den sich die Messungen bezogen, $h = 3$, $c = 0{,}415$ und $\frac{x}{\partial V / \partial n} = 2 \cdot 0{,}743 \cdot 0{,}000387 = 0{,}000575$, folglich $\frac{|e_{11}| \varkappa_1}{v^2} = \frac{589 \cdot 21{,}67 \cdot 10^{-6}}{180 \cdot 3{,}68} \frac{x}{\partial V / \partial n} = 1{,}11 \cdot 10^{-8}$. Uebrigens ist auch nicht angegeben, ob Herr Czermak, wie hier vorausgesetzt, bei gekreuzten Nicols beobachtet hat. —

b. Kraftlinien parallel Y^0.

Hier ist $a = 0$, $b = m$, $c = 0$, folglich nach 44):

$$B_{11} - \omega_o^{0^2} = B_{22} - \omega_o^{0^2} = B_{33} - \omega_e^{0^2} = 0,$$
$$B_{23} = 0, \qquad B_{31} = -e_{41} m, \qquad B_{12} = -e_{11} m.$$

Da B_{31} und B_{12} von 0 verschieden sind, so wird das optische Symmetrieaxensystem X, Y, Z aus dem Axensystem X^0, Y^0, Z^0 durch eine Drehung um die Y^0-Axe und eine solche um die Z^0-Axe hervorgehen. Die erstere ist in Folge der starken ursprünglichen Doppelbrechung jedenfalls sehr klein, analog der Drehung um die X^0-Axe im Falle *a*. Daher sind die Richtungscosinus γ_1, γ_2, α_3, β_3 als kleine Grössen erster Ordnung, $1 - \gamma_3$ als eine solche zweiter Ordnung zu behandeln, und von den Gleichungen 3) zur Bestimmung der Richtungscosinus, welche zunächst lauten:

$$(\omega_e^{0^2} - \omega_o^{0^2}) \beta_3 \gamma_3 - e_{41} m (\beta_3 \gamma_1 + \beta_1 \gamma_3) - e_{11} m (\beta_2 \gamma_1 + \beta_1 \gamma_2) = 0,$$
$$(\omega_e^{0^2} - \omega_o^{0^2}) \gamma_3 \alpha_3 - e_{41} m (\gamma_3 \alpha_1 + \gamma_1 \alpha_3) - e_{11} m (\alpha_2 \gamma_1 + \alpha_1 \gamma_2) = 0,$$
$$(\omega_e^{0^2} - \omega_o^{0^2}) \alpha_3 \beta_3 - e_{41} m (\alpha_3 \beta_1 + \alpha_1 \beta_3) - e_{11} m (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) = 0,$$

kann man die beiden ersten schreiben:

$$e_{41} m \beta_1 = (\omega_e^{0^2} - \omega_o^{0^2}) \beta_3 - (\beta_2 \gamma_1 + \beta_1 \gamma_2) e_{11} m$$
$$e_{41} m \alpha_1 = (\omega_e^{0^2} - \omega_o^{0^2}) \alpha_3 - (\gamma_2 \alpha_1 + \gamma_1 \alpha_2) e_{11} m,$$

während die dritte lehrt, dass $\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1$ eine kleine Grösse erster Ordnung

d. h. wie α_3 und β_3 von der Grössenordnung der Quotienten $\frac{e_{11}m}{\omega_o^{0^2}-\omega_e^{0^2}}$ und $\frac{e_{41}m}{\omega_o^{0^2}-\omega_e^{0^2}}$ ist. Aus der letzteren Bedingung in Verbindung mit dem oben über α_3 und β_3 Gesagten folgt, dass bis auf kleine Grössen erster Ordnung

$$\alpha_1 = \beta_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \qquad \alpha_2 = -\beta_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

ist. (Man könnte zwar über die Vorzeichen auch anders verfügen, doch hätte das keinen Einfluss auf das Endresultat). Hieraus folgt weiter, ebenfalls in erster Näherung, d. h. unter Vernachlässigung von $\gamma_1 e_{11} m$ und $\gamma_2 e_{11} m$,

$$\alpha_3 = -\beta_3 = +\frac{e_{41}m\sqrt{\frac{1}{2}}}{\omega_e^{0^2}-\omega_o^{0^2}},$$

$$\gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 = -\frac{e_{41}m}{\omega_e^{0^2}-\omega_o^{0^2}},$$

während γ_2 eine kleine Grösse 2ter Ordnung wird.

Aus vorstehenden Resultaten ist ersichtlich, dass die Drehung des Axensystems um die Z^0-Axe sehr nahe gleich $+\frac{\pi}{4}$, diejenige um die Y^0-Axe gleich $\frac{+e_{41}m}{\omega_o^{0^2}-\omega_e^{0^2}}$ ist. Ferner werden die Quadrate der Hauptlichtgeschwindigkeiten, nach den allgemeinen Gleichungen 4) berechnet,

$$\omega_x^2 = \omega_o^{0^2} - e_{11}m, \qquad \omega_y^2 = \omega_o^{0^2} + e_{11}m, \qquad \omega_z^2 = \omega_e^{0^2}.$$

Die optischen Axen liegen also in der ZX-Ebene (— d. i. sehr annähernd die Halbirungsebene des Winkels zwischen den durch Z^0 und $+X^0$ bezw. $+Y^0$ gelegten Ebenen —), falls $e_{11}m < 0$ ist, in der YZ-Ebene, falls $e_{11}m > 0$ ist; jedenfalls ist der halbe Winkel zwischen den optischen Axen, Ω, bestimmt durch

$$\sin^2\Omega = \frac{2|e_{11}m|}{\omega_o^{0^2}-\omega_e^{0^2}},$$

wenn $|e_{11}m|$ den absoluten Betrag von $e_{11}m$ bezeichnet.

Für die Compensatorbeobachtungen kommen hier Beobachtungsrichtungen in Betracht, die in der Z^0X^0-Ebene liegen. Für eine solche Fortpflanzungsrichtung N soll daher jetzt die Differenz $\omega_2^2-\omega_1^2$ berechnet werden, unter der Voraussetzung, dass der Winkel $Z^0N = \vartheta$ (— positiv gerechnet, wenn N im Quadranten zwischen $+Z^0$, $+X^0$ liegt —) gross genug ist, damit man die Circularpolarisation vernachlässigen könne. Die eine Welle, deren Geschwindigkeit ω_1 sei, ist dann sehr nahe parallel Y^0, also parallel den Kraftlinien, die andere sehr nahezu in der Z^0X^0-Ebene polarisirt, und zwar gilt dies mit solcher Annäherung, dass die Abweichungen von jenen Richtungen praktisch, d. h. bei der Einstellung der Nicol- und Compensatorhauptschnitte, vollständig vernachlässigt werden können.

Für $\omega_2^2-\omega_1^2$ hat man zunächst den Ausdruck

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = (\omega_o^{0^2} - \omega_e^{0^2} + |e_{11} m|) \sin(A_1 N) \sin(A_2 N),$$

gleichgültig, ob die optischen Axen A_1, A_2 in der YZ-Ebene oder in der ZX-Ebene (etwa bei A_1', A_2' in nebenstehender Figur 8) liegen.

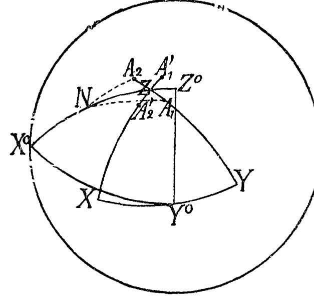


Fig. 8

Es ist nun, wie aus Fig. 8 leicht ersichtlich, da $\angle(NZA_1) = 135^0$, $\angle(NZA_2) = 45^0$ ist:

$$\cos(NA_1) = \cos(NA_1')$$
$$= \cos(NZ)\cos\Omega - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\sin(NZ)\sin\Omega,$$
$$\cos(NA_2) = \cos(NA_2')$$
$$= \cos(NZ)\cos\Omega + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\sin(NZ)\sin\Omega;$$

folglich jedenfalls

$$\sin^2(A_1 N)\sin^2(A_2 N) = (1 - \cos^2(NZ)\cos^2\Omega)^2 - \sin^2(NZ)\sin^2\Omega + \tfrac{1}{4}\sin^4(NZ)\sin^4\Omega$$
$$- \sin^2(NZ)\cos^2(NZ)\sin^2\Omega\cos^2\Omega.$$

Hierin ist $(NZ) = (NZ^0) - \gamma_1$, da $(ZZ^0) = \sin(ZZ^0) = \gamma_1$ gesetzt werden kann. Setzt man diesen Werth ein und entwickelt nun unter Vernachlässigung aller kleinen Grössen 2ter Ordnung, wie γ_1^2, $\sin^4\Omega$, $\gamma_1\sin^2\Omega$ etc., so folgt

$$\sin^2(A_1 N)\sin^2(A_2 N) = \sin^4\vartheta - \sin^2\vartheta\{\sin^2\vartheta\sin^2\Omega + 4\gamma_1\sin\vartheta\cos\vartheta\},$$
$$\sin(A_1 N)\sin(A_2 N) = \sin^2\vartheta\{1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\Omega - 2\gamma_1\operatorname{cotg}\vartheta\},$$

und demnach, ebenfalls bis auf Grössen 2ter Ordnung,

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = (\omega_o^{0^2} - \omega_e^{0^2} + |e_{11} m|)\sin^2\vartheta - \tfrac{1}{2}(\omega_o^{0^2} - \omega_e^{0^2})\sin^2\Omega\sin^2\vartheta - \gamma_1(\omega_o^{0^2} - \omega_e^{0^2})\sin 2\vartheta,$$

oder, da $(\omega_o^{0^2} - \omega_e^{0^2})\sin^2\Omega = 2|e_{11} m|$ und $\gamma_1(\omega_o^{0^2} - \omega_e^{0^2}) = e_{41} m$ ist,

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = (\omega_o^{0^2} - \omega_e^{0^2})\sin^2\vartheta - e_{41} m \sin 2\vartheta.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite stellt den ursprünglichen Werth der Differenz $\omega_2^2 - \omega_1^2$ dar; die Zunahme des Gangunterschiedes in Folge der dielektrischen Polarisation m ist also gegeben durch $-e_{41} m \sin 2\vartheta$, somit allein von der Constante e_{41}, nicht von e_{11}, abhängig und übrigens am grössten für $\vartheta = \pm 45^0$, gleich Null dagegen für $\vartheta = 0^0$ und 90^0, d. h. für die Richtungen der Z^0- und X^0-Axe.

Die Compensatormessungen in der Richtung N würden demnach ohne Berücksichtigung der Dickenänderung ergeben

$$\overline{\Delta} = -\frac{L}{\lambda}\frac{n_m'^3}{2}\frac{e_{41} m}{v^2}\sin 2\vartheta,$$

wo n_m' einen mittleren Werth des Brechungsindex bezeichnet, etwa $\tfrac{3}{4}n_o^0 + \tfrac{1}{4}n_e^0$, falls ϑ nahe $= \pm 45^0$ ist.

Die lineare Dilatation in der Richtung N ist allgemein

$$x_x \cos^2\vartheta + z_z \sin^2\vartheta + \tfrac{1}{2} z_x \sin 2\vartheta,$$

und da im vorliegenden Fall zufolge 47) $x_x = z_z = 0$, $z_x = -\delta_{14}\frac{m}{\varkappa_1}$ ist, so wi

$$L - L^0 = -L^0 \frac{\delta_{14}}{2}\frac{m}{\varkappa_1}\sin 2\vartheta.$$

Demnach erhält man schliesslich, da $n_1^0 - n_2^0$ wieder $= (n_e^0 - n_o^0)\sin^2\vartheta$ ist,

59) $$\overline{\Delta} = -\frac{L^0}{\lambda}\frac{m}{\varkappa_1}\left\{\frac{n_m'^3}{2}\frac{e_{41}\varkappa_1}{v^2} + (n_e^0-n_o^0)\frac{\delta_{14}}{2}\sin^2\vartheta\right\}\sin 2\vartheta.$$

Die speciellen Werthe für $\vartheta = +45^0$ bezw. -45^0 sollen mit $\overline{\Delta}_4$ und $\overline{\Delta}$ bezeichnet werden; dieselben sind einander entgegengesetzt gleich, nämlich:

60) $$\overline{\Delta}_4 = -\tfrac{1}{2}\frac{L}{\lambda}\frac{m}{\varkappa_1}\left\{n_m'^3\frac{e_{41}\varkappa_1}{v^2}+\tfrac{1}{2}(n_e^0-n_o^0)\delta_{14}\right\}$$

61) $$\overline{\Delta}_5 = +\tfrac{1}{2}\frac{L}{\lambda}\frac{m}{\varkappa_1}\left\{n_m'^3\frac{e_{41}\varkappa_1}{v^2}+\tfrac{1}{2}(n_e^0-n_o^0)\delta_{14}\right\}.$$

c. Anmerkung.

Berechnung der optischen Wirkung der gewöhnlichen Elektrostriction im Falle der Elektrisirung parallel der X^0-Axe.

Es kann die Frage enstehen, wie weit beim Quarz die beobachteten Aenderungen der Doppelbrechung im elektrischen Felde von derjenigen Deformation beeinflusst werden konnten, welche mit der gewöhnlichen, auch in isotropen Körpern vorhandenen sog. Elektrostriction verbunden ist. Zwar würden sich diese „Wirkungen zweiter Ordnung", weil sie sich mit der Elektrisirungsrichtung nicht umkehren, jederzeit von den bisher allein berücksichtigten Wirkungen erster Ordnung trennen lassen und also die im Vorhergehenden entwickelte Bestimmung der Constanten e_{11} und e_{41} nicht stören, sofern nur für die Grössen $\frac{\overline{\Delta}}{m}$ immer die Mittelwerthe aus den bei positivem und negativem Moment m beobachteten Werthen genommen werden; aber es hat an und für sich Interesse, die Grössenordnung jener Wirkungen zweiter Ordnung abzuschätzen, um zu erfahren, ob sie unter den Versuchsbedingungen wahrnehmbar werden konnten oder nicht. Wir wollen dies ausführen für den günstigsten Fall, der vorkam, nämlich die Beobachtung des Gangunterschiedes in der Richtung Y^0 in einer Platte von der Länge 44,7 mm und der Dicke 3,2 mm (parallel X^0), welche in der Richtung X^0 zwischen zwei Metallplatten dielektrisch polarisirt wurde.

Es soll dabei, wie es auch bei den vorhergehenden Berechnungen immer stillschweigend geschehen ist, vorausgesetzt werden, dass die dielektrische Polarisation der Platte gleichförmig sei, eine Voraussetzung, die bei relativ dünnen Platten zulässig ist und auch durch später zu erwähnende Beobachtungen bestätigt worden ist. Dann können auch die Kraftlinien in der Nähe der schmalen Seitenflächen der Platte als diesen parallel und das elektrische Feld somit neben der Platte und innerhalb derselben als gleich stark betrachtet werden. Das Potentialgefälle $\frac{\partial V}{\partial n}$ ist im Falle direct anliegender Metallplatten gleich deren Potentialdifferenz dividirt durch die Plattendicke, oder, wenn noch zum Schutz gegen Entladungen Glimmerplatten zwischengelegt sind, nach der entsprechend vereinfachten Formel 12a) zu berechnen.

Die Elektrostriction besteht dann aus einem Drucke auf die zu den Kraftlinien senkrechten Breitseiten der Platte von der Grösse

$$X_x = \frac{K_1}{8\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2$$

und aus einem auf die Schmalseiten wirkenden, nach aussen gerichteten Zuge

$$Y_y = Z_z = -\frac{K_1 - 1}{8\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2,$$

wo K_1 die Dielektricitätsconstante für die Richtungen senkrecht zur Hauptaxe bezeichnet, also $\frac{K_1 - 1}{4\pi}$ mit der zuvor eingeführten Grösse $\varkappa_1$ übereinstimmt.

Die von diesen Drucken bezw. Spannungen hervorgerufenen Deformationen sind nun nach den Gleichungen 49), worin aber die Elasticitätsmoduln jetzt in absolutem Maasse gemessen werden müssen und deshalb durch einen Index ausgezeichnet werden sollen, folgende:

$$x_x = -\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 \{s'_{11} K_1 - (s'_{11} + s'_{13})(K_1 - 1)\},$$

$$y_y = -\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 \{s'_{12} K_1 - (s'_{11} + s'_{13})(K_1 - 1)\},$$

$$z_z = -\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 \{s'_{13} K_1 - (s'_{13} + s'_{33})(K_1 - 1)\},$$

$$y_z = -\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 \cdot s'_{14}(2K_1 - 1).$$

Die durch diese Deformationen verursachte Aenderung des Gangunterschiedes in der Richtung Y, in Wellenlängen ausgedrückt, ist nach den Gleichungen 45):

$$\frac{L}{2\lambda}\left\{\frac{\omega_o^{0^2}-B_{11}}{v^2}n_o^{0^3}-\frac{\omega_e^{0^2}-B_{33}}{v^2}n_e^{0^3}\right\}$$

$$=\frac{L}{2\lambda}\left\{\frac{1}{v^2}(a_{31}(x_x+y_y)+a_{33}z_z)n_e^{0^3}-\frac{1}{v^2}(a_{11}x_x+a_{12}y_y+a_{13}z_z+a_{14}y_z)n_o^{0^3}\right\}$$

$$=\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2\frac{Ln_m^3}{2\lambda}\left\{\frac{a_{11}}{v^2}(K_1 s'_{11}-(K_1-1)(s'_{12}+s'_{13}))\right.$$

$$+\frac{a_{12}}{v^2}(K_1 s'_{12}-(K_1-1)(s'_{11}+s'_{13}))+\frac{a_{14}}{v^2}s'_{14}(2K_1-1)$$

$$\left.-\frac{a_{31}}{v^2}(K_1(s'_{11}+s'_{12})-(K_1-1)(s'_{11}+s'_{12}+2s'_{13}))+\frac{(a_{33}-a_{13})}{v^2}((K_1-1)s'_{33}-s'_{13})\right\},$$

wo zuletzt für n_o^0 und n_e^0 ein mittlerer Werth n_m gesetzt ist.

Setzt man hierin ein $K_1 = 4{,}6$, $L = 44{,}7$, $n_m^3 = 3{,}7$, $\lambda = 589{,}2 \cdot 10^{-6}$ (gültig für Na-Licht), ferner nach meinen früheren Bestimmungen [1])

$$\frac{a_{11}}{v^2} = +0{,}138, \quad \frac{a_{12}}{v^2} = +0{,}250, \quad \frac{a_{31}}{v^2} = +0{,}258, \quad \frac{a_{33}-a_{13}}{v^2} = -0{,}161,$$

$$\frac{a_{14}}{v^2} = -0{,}029,$$

und nach denjenigen von Herrn Voigt [2]):

$$s'_{11} = 12{,}97 \cdot 10^{-13}, \quad s'_{12} = -1{,}66 \cdot 10^{-13}, \quad s'_{13} = -1{,}52 \cdot 10^{-13}, \quad s'_{33} = 9{,}91 \cdot 10^{-13},$$

$$s'_{14} = -4{,}31 \cdot 10^{-13},$$

so wird der ganze Ausdruck:

$$-73 \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 \cdot 10^{-10},$$

oder die zu erwartende Verzögerung in Umdrehungen der Compensatorschraube:

$$-1{,}74 \cdot 10^{-7} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2.$$

Berechnet für das grösste Potentialgefälle, welches zur Anwendung kam, nämlich ca. 90, giebt dies $-1{,}42 \cdot 10^{-3}$, d. h. 0,14 Trommeltheile, d. i. eine Grösse, die etwa zehnmal kleiner ist, wie die Beobachtungsfehler. Damit ist gezeigt, dass die optische Wirkung der Deformationen 2ter Ordnung nicht bemerkbar sein konnte, also etwa vorkommende Abweichungen der bei positivem und negativem Moment beobachteten absoluten Werthe von Δ lediglich auf Beobachtungsfehler oder sonstige Störungen zurückzuführen sind. In der That waren jene Differenzen immer nur klein und zeigten keinerlei Regelmässigkeit, d. h. nicht etwa ein Ueberwiegen der negativen über die positiven Δ.

---

1) F. Pockels, Wied. Ann. **37**, p. 300. 1889.
2) W. Voigt, Wied. Ann. **31**, 701. 1887.

Bei der vorstehenden Berechnung sind freilich diejenigen Elektrostrictionsglieder, welche in reciproker Beziehung zur Aenderung des dielektrischen Verhaltens durch Deformationen stehen, nicht berücksichtigt, weil über diese beim Quarz nichts bekannt ist; es ist aber durchaus unwahrscheinlich, dass dieselben die Grösse der in Rechnung gezogenen gewöhnlichen Elektrostrictionsglieder erreichen oder gar übertreffen sollten.

§ 3. **Elektrooptische Beobachtungen.**

a. Elektrisirungsrichtung parallel der X^0-Axe.

Zu den Beobachtungen in den Richtungen Y^0 und Z^0 diente eine rechteckige Platte („No. 1"), welche in der Anstalt der Herren Dr. Steeg u. Reuter aus einem grossen, völlig einschlussfreien linken Quarzkrystall (wahrscheinlich aus Brasilien) unter sorgfältiger Vermeidung der verzwillingten Stellen geschnitten war. (Der Krystall besass nämlich in gewissen Theilen optisch erkennbare Zwillingsverwachsungen von Rechtsquarz.) Die Breitseiten der Platte waren senkrecht zu zwei natürlichen Prismenflächen und nahezu parallel zur Z^0-Axe geschliffen, also bis auf eine gleich zu erwähnende kleine Abweichung parallel zur $Y^0 Z^0$-Ebene bei der in § 1 getroffenen Verfügung über das Coordinatensystem. Die Breitseiten waren nur fein mattgeschliffen, die vier schmalen Seitenflächen dagegen gut polirt. Die Länge der zu Z^0 parallelen Kanten betrug 59,9 mm, diejenige der zu Y^0 parallelen 44,7 mm. Die Dicke D der Platte, welche an einer grösseren Anzahl gleichmässig über ihre Breitseite vertheilter Stellen mittelst eines Sphärometers gemessen wurde, dessen Theile 0,006478 mm entsprachen, variirte zwischen 3,115 und 3,19 mm und betrug im Mittel **3,16** mm.

Die Plattennormale hatte nicht ganz genau die beabsichtigte Orientirung parallel der X^0-Axe, sondern wich von dieser sowohl gegen die Y^0- als gegen die Z^0-Axe hin ein wenig ab. Die Abweichung in der $Z^0 X^0$-Ebene konnte direct durch Bestimmung der Auslöschungsrichtungen auf den längeren Schmalseiten ermittelt werden, da sie deren Abweichung von den Kantenrichtungen sehr nahezu gleich ist. Bei Drehung der Platte in ihrer Ebene um 180^0 änderten sich nun jene Auslöschungsrichtungen um $2\frac{1}{2}^0$; folglich betrug die Abweichung der Normale der Breitseiten von X^0 gegen Z^0 hin $\mathbf{1^0 15'}$. Die Abweichung in der $Y^0 X^0$-Ebene war jedenfalls noch geringer, wie aus der Schnittfläche am Krystall zu ersehen war.

Wurde die Platte senkrecht zu ihren Breitseiten (durch Ladung metallischer Belegungen derselben) dielektrisch polarisirt, so war demnach das Moment a vom Gesammtmoment $m = -\varkappa_1 \frac{\partial V}{\partial n}$ nur um den Factor $\cos 1\frac{1}{4}^0$ verschieden, welcher $= 1$ gesetzt werden kann, ferner das Moment b verschwindend klein, und $c = -\varkappa_3 \frac{\partial V}{\partial n} \cdot \sin 1\frac{1}{4}^0$; letztere Componente kommt aber für die elektro-

optische Wirkung nicht in Betracht. Demnach kommt hier die Abweichung der Plattennormale von X^0 für die dielektrische Polarisation gar nicht zur Geltung. Ebensowenig thut sie es aber für die optischen Beobachtungen, weil auf den zur Hauptaxe senkrechten Seitenflächen, wo allein sie von Einfluss sein könnte, nur Beobachtungen im convergenten Licht ausgeführt wurden, wobei sich jener Orientirungsfehler nur in excentrischer Lage der Ringe zeigte und allerdings den Nachtheil hatte, dass deren Mittelpunkt sehr nahe dem oberen oder unteren Rande der Platte erschien. Dagegen ist bei den Messungen des Gangunterschiedes auf den langen Schmalseiten noch zu berücksichtigen, dass die langen Kanten der Platte etwas von der Z^0- bezw. Y^0-Axe abwichen, entsprechend einer kleinen Drehung um die X^0-Axe. Dies hatte zur Folge, dass man bei gerader Durchsicht durch jene Seitenflächen nicht genau senkrecht zur Hauptaxe beobachtete, also nicht in einer Richtung maximalen Gangunterschiedes. Da letzteres aber bei den Compensatorbeobachtungen wünschenswerth war, damit nicht eine kleine Drehung der Platte in ihrer Ebene infolge von Erschütterungen etc. schon eine merkliche Aenderung des Gangunterschiedes hervorrief, so wurde die Platte vor Ausführung der Messungen soweit um ihre Normale (also in der Ebene der Breitseiten) gedreht, bis der Compensatorstreifen seine äusserste, dem Maximum des Gangunterschiedes entsprechende Lage erreicht hatte. Es fragt sich, in welcher Richtung dann die Lichtstrahlen (man braucht in diesem Fall nicht zwischen Strahl und Wellennormale zu unterscheiden) durch den Krystall hindurchgingen. Ist α (Fig. 9) der Winkel zwischen der Normale der langen Seitenflächen und der Y^0-Axe, β der Winkel zwischen ersterer und den Lichtstrahlen im Krystall, somit $\alpha - \beta$ die Neigung der Strahlen gegen die Y^0-Axe, so ist der Gangunterschied proportional mit $\frac{\cos^2(\alpha-\beta)}{\cos\beta}$. Soll derselbe durch Drehung der Platte in ihrer Ebene, also durch Aenderung von β, ein Maximum werden, so muss sein $\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\cos^2(\alpha-\beta)}{\cos\beta}\right) = 0$ oder $\sin 2(\alpha-\beta)\cos\beta + \cos^2(\alpha-\beta)\sin\beta = 0$ oder auch $\cos(\alpha-\beta)(\sin(\alpha-\beta)\cos\beta + \sin\alpha) = 0$.

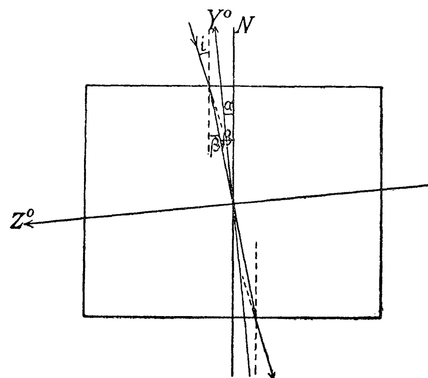


Fig. 9

Da $\cos(\alpha-\beta)$ nicht $= 0$ sein kann und die Winkel α und β sehr klein sind, so folgt hieraus

$$\sin(\alpha-\beta) = -\sin\alpha,$$
$$\beta = 2\alpha.$$

Der Einfallswinkel i, für welchen der Gangunterschied ein Maximum wird, ist also $n'_m \cdot 2\alpha$ oder nahezu 3α, und umgekehrt ist $\alpha = \frac{1}{3}i$, $\beta = \frac{2}{3}i$.

Der Winkel i, d. h. die Drehung aus der Normallage, welche der Platte zu ertheilen war, um ein Maximum des Gangunterschiedes zu erhalten, betrug nun ungefähr $2{,}6^0$, α also $0{,}85^0$ und ebensoviel die Abweichung der Lichtstrahlen, deren Gangunterschied gemessen wurde, von der Y^0-Axe; eine so kleine Abweichung kann aber vernachlässigt werden.

Wir sind also zu dem Ergebniss gelangt, dass die Orientirungsfehler dieser Platte überhaupt nicht in Rechnung gezogen zu werden brauchen.

I. Compensatorbeobachtungen in der Richtung Y^0.

Der ursprüngliche Gangunterschied $\frac{L}{\lambda}(n_e^0 - n_o^0)$ in dieser Richtung war wegen der grossen Breite ($L = 44{,}7$ mm) der Platte so gross, dass die Interferenzstreifen des Compensators auch im homogenen Lichte nicht mehr scharf erschienen, weil bei der Accomodation des Auges auf den in deutlicher Sehweite befindlichen Compensatorspalt immerhin Strahlen vereinigt wurden, die in etwas verschiedenen Richtungen durch den Krystall gegangen waren und somit im vorliegenden Fall bereits merklich verschiedene relative Verzögerungen besassen. Daher musste der ursprüngliche Gangunterschied zunächst durch einen entgegengesetzt gleichen, constanten Gangunterschied compensirt werden. Zu diesem Zwecke wurde das Krystallstück, von welchem die Platte 1 abgeschnitten worden war, zwischen letzterer und dem Analysator so aufgestellt, dass seine optische Axe vertikal, also senkrecht zur optischen Axe der horizontal liegenden Platte stand, und die beiden zur Schnittfläche senkrechten, polirten Prismenflächen des Krystallstückes ungefähr senkrecht zur Beobachtungsrichtung waren. Hierdurch war eine so vollständige Compensation erreicht, dass man auch im weissen Lichte die Compensatorstreifen sah und den mittleren, schwarzen Streifen zur Einstellung benutzen konnte, wodurch man wegen der viel grösseren Lichtintensität gegenüber der Einstellung mit Natriumlicht erheblich an Genauigkeit gewann. Dass die Beobachtung mit weissem Licht — als Lichtquelle diente eine Argand-Lampe — überhaupt zulässig war und dasselbe Resultat ergab, welches mit Natriumlicht gefunden worden wäre, zeigte sich darin, dass der schwarze Compensatorstreifen bei der Verschiebung, die er durch dielektrische Polarisation der Platte erlitt, vollständig schwarz blieb, d. h. keine farbigen Ränder bekam. Denn dies beweist, dass die Streifenverschiebung für alle im Lampenlicht intensiv vorhandenen Farben die gleiche, mithin der erzeugte Gangunterschied umgekehrt proportional der Wellenlänge war. Danach ist die erzeugte Geschwindigkeitsdifferenz, also auch die Constante $\frac{e_{11}}{v^2}$, unabhängig von der Wellenlänge bis etwa auf Unterschiede von der Ordnung der Dispersion des Quarzes. Uebrigens wurde auch durch einige später anzuführende Beobachtungen mit Natriumlicht die Uebereinstimmung der Streifenverschiebung Δ für letzteres und für weisses Licht direct bestätigt.

Die Platte sowie der davor gestellte Krystall wurden vor den Beobachtungen successive so um die Vertikalaxe gedreht, dass sich der schwarze Compensatorstreifen nahezu in derjenigen Stellung befand, wo er bei weiterem Drehen umkehrte, also so dass der Gangunterschied in der Platte allein und im Krystallstück allein ein Maximum war (siehe S. 100). Trotzdem erwies sich die Nullstellung des Compensators, d. h. die Einstellung des Streifens bei nicht elektrisirter Platte, häufig als langsam mit der Zeit veränderlich. Dies erklärt sich durch Temperaturdifferenzen zwischen der Platte und dem compensirenden Krystallstück, welche z. B. durch die grössere Nähe des Beobachters an letzterem leicht eintreten konnten; denn eine Temperaturdifferenz jener beiden Theile von 1^0 musste, nach den von Fizeau bestimmten Aenderungen von n_o^0 und n_e^0 mit der Temperatur berechnet, schon eine merkliche Aenderung des Gangunterschiedes zur Folge haben. Gleichmässige Temperaturänderungen der Platte und des compensirenden Krystalles konnten hingegen keinen Einfluss haben; dementsprechend verschwand auch die anfangs etwa vorhandene Nullpunktsverschiebung immer einige Zeit nach der Aufstellung oder wurde doch so gering, dass sie keine Fehler mehr zur Folge haben konnte.

Die Orientirung der Nicols und des Compensators gegen die Quarzplatte erfolgte in der Weise, dass zunächst die drei ersteren um ihre horizontalen, mit der Beobachtungsrichtung zusammenfallenden Axen so gedreht wurden, dass das ganze Gesichtsfeld des Compensators möglichst gleichmässig dunkel erschien; dann fielen sowohl die zu einander senkrechten Hauptschnitte der Nicols, als die Hauptschnitte des Compensators mit den Schwingungsrichtungen in der Quarzplatte zusammen, und man brauchte nur noch den Polarisator und Analysator um 45^0 in gleichem Sinne zu drehen, um diejenige Orientirung zu erhalten, welche wir bei der Berechnung der Gangunterschiede aus den beobachteten Streifenverschiebungen Δ immer vorausgesetzt haben. Es sei noch bemerkt, dass immer diejenige Lage des Compensators (unter den beiden um eine Drehung von 90^0 verschiedenen) gewählt war, bei welcher der schwarze Streifen und also der Spalt (nahezu) senkrecht zur Breitseite der Platte verlief, um nämlich an verschiedenen Stellen der langen Schmalseiten der Platte Δ messen zu können.

Was nun die Erzeugung des elektrischen Feldes betrifft, so lag die Quarzplatte bei den meisten Versuchen zwischen zwei ringsum 1—2 cm überstehenden Glimmerplatten, die auf den von der Quarzplatte abgewandten Seiten mit Stanniolbelegungen, welche etwas grössere Länge und Breite als die Quarzplatte besassen, versehen waren. Wurde nun die eine Stanniolbelegung mit der auf ein bestimmtes Potential V geladenen Batterie verbunden, während die andere (untere) zur Erde abgeleitet war, so befand sich die Quarzplatte in einem fast ganz homogenen elektrischen Felde, dessen Intensität im Quarz nach der Formel 12a) war:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{V}{D + \frac{K}{K_1} D_1},$$

wenn D die Dicke der Quarzplatte, D_1 diejenige beider Glimmerplatten zusammen, und K, K_1 die betreffenden Dielektricitätsconstanten sind. Es ist $K = 4{,}6$ für Quarz, $K_1 = 6{,}64$ für Glimmer; die Dicken waren: $D = 0{,}316$, $D_1 = 0{,}0302$ cm; folglich wird hier $\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{V}{0{,}337}$.

Bei einigen späteren Beobachtungsreihen lag die Quarzplatte direct zwischen Metallplatten. In diesem Fall ist als Abstand der letzteren die maximale Dicke der Quarzplatte anzunehmen und somit zu setzen $\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{V}{0{,}319}$.

Die Messung des Potentiales geschah anfänglich nur durch die Schlagweite der Maassflasche. In diesen Fällen wurde der Compensator so eingestellt, dass der schwarze Streifen unmittelbar vor der Entladung in der Mitte des Spaltes erschien, eine Einstellung, die bei langsamer Ladung hinreichend sicher ausgeführt werden konnte. Dabei wurde die Maassflasche abwechselnd mit dem positiven und negativen Pol der Influenzmaschine verbunden, und zwischen jedem Polwechsel wieder die Nullstellung des Compensators bestimmt, die meist nahezu constant war; hatte sie sich ein wenig geändert, so wurde bei Berechnung des $\varDelta$ das Mittel aus der vorher und nachher beobachteten Nullstellung benutzt. — Später diente zur Potentialmessung das im § 3 des I. Theiles beschriebene Bifilar-Elektrometer, bei höheren Potentialen, die damals nicht genügend constant blieben, jedoch in der Weise, dass ebenfalls die Maassflasche mit geeignetem Kugelabstand eingeschaltet und die Streifenverschiebung im Momente vor deren Entladung beobachtet, aber vor und nach jeder derartigen Beobachtungsreihe der dem Entladungspotential entsprechende Elektrometerausschlag durch mehrere besondere Versuche ermittelt wurde.

Von den Beobachtungen, bei welchen nur die Maassflasche benutzt wurde, seien zunächst vergleichende Messungen an derselben Stelle der Platte mit weissem Licht und Natriumlicht erwähnt, welche bei einer Schlagweite $a = 0{,}5$ Theilen des Maassflaschen-Maassstabes im Mittel $\varDelta = 5{,}08$ für weisses Licht, $= 5{,}06$ für Natriumlicht ergaben, also innerhalb der Fehlergrenzen übereinstimmende Werthe. Diese Uebereinstimmung fand sich auch noch bei einer später zu erwähnenden Beobachtungsreihe bestätigt; abgesehen von dieser, wurde aber nunmehr immer weisses Licht angewendet.

Sodann ist eine Beobachtungsreihe anzuführen, die den Zweck hatte, zu prüfen, wie die relativen Verzögerungen an verschiedenen Stellen der Platte, d. h. auf verschiedenen Parallelen zu deren mittleren Kanten (also zur Y^0-Axe), übereinstimmten, d. h. wie weit die Voraussetzung der Homogenëität der dielektrischen Polarisation der Platte bis an deren Rand hin erfüllt war. Unter der vor jeder Beobachtung angegebenen Stelle der Platte, auf welche sich die erstere bezieht, ist hier wie auch später immer diejenige Stelle der dem Beobachter zugewandten Plattenschmalseite zu verstehen, wo der Compensatorstreifen gesehen wurde, das ist also die Austrittsstelle der Wellennormalen, deren Gangunterschied gemessen wurde; deren Eintrittsstelle kann etwas (jedoch nur

sehr wenig) näher oder ferner dem Rande der Platte gelegen haben, weil die Wellennormalen aus dem S. 100 erwähnten Grunde meistens nicht genau parallel den mittleren Plattenkanten hindurchgingen. — In der nachstehenden Tabelle, wie in den späteren, sind die Compensatoreinstellungen bei abwechselnd entladener, positiv und negativ geladener Plattenbelegung in derjenigen Reihenfolge (von links nach rechts fortschreitend) angeführt, wie sie beobachtet wurden, wobei jedoch die absolute Zahl ganzer Umdrehungen, welche der Index des Compensators zufällig anzeigte, in allen Fällen um eine passend gewählte ganze Zahl vermindert worden ist, um nicht unnöthig grosse Zahlen angeben zu müssen. Die erste Zeile enthält immer die Einstellungen bei negativem Moment a (also positiver Ladung derjenigen Plattenseite, aus welcher die $+X^0$-Axe austritt), die zweite die Nullstellungen (Einstellungen bei abgeleiteten Belegungen), die dritte die Einstellungen bei positivem Moment, endlich die vierte, unter dem Strich, die Differenzen $\varDelta$, bei deren Berechnung immer der Mittelwerth aus je 2 aufeinander folgenden Nullstellungen benutzt ist. Am Schluss der vierten Zeile steht dann jedesmal das Mittel aus den absoluten Werthen der einzelnen $\varDelta$.

Schlagweite $a = 0{,}5$. V (nach S. 25) $= 17{,}23$.

	1 cm vom linken Rand.							
—		5,90				5,86		
0	3,44		3,42		3,33		3,25	
+				0,82				
$\varDelta$		+ 2,47		— 2,56		+ 2,57		**2,53**

	2 cm vom linken Rand.							
—		5,38				5,28		
0	2,85		2,81		2,68		2,74	
+				0,27				
$\varDelta$		+ 2,55		— 2,48		+ 2,57		**2,53**

	Mitte.							
—				5,74				
0	3,18		3,14		3,15		3,13	
+		0,73				0,70		
$\varDelta$		— 2,43		+ 2,60		— 2,44		**2,49**

	2 cm vom rechten Rand.									
—				5,99				5,94		
0	3,37		3,32		3,36		3,32		3,33	
+		0,80				0,82				
$\varDelta$		— 2,55		+ 2,65		— 2,52		+ 2,61		**2,58**

	1 cm vom rechten Rand.									
—		6,86				6,85				
0	4,17		4,22		4,23		4,25		4,24	
+				1,60				1,66		
Δ		+2,66		−2,62		+2,61		−2,58		**2,62**

	0,5 cm vom rechten Rand.						
—		6,40				6,46	
0	3,77		3,81		3,81		
+				1,19			
Δ		+2,61		−2,62			**2,62**

	Wieder in der Mitte.							
—		6,07				6,00		
0	3,22		3,37		3,28		3,32	
+				0,76				
Δ		+2,72		−2,57		+2,70		**2,66.**

Nach Drehung der Platte um 180⁰ um die Beobachtungsrichtung und neuer Einstellung der Maassflaschenkugeln wurde im Mittel gefunden

1,5 cm vom rechten Rand	$\lvert\Delta\rvert =$	2,50
in der Mitte		2,61
1,5 cm vom linken Rand		2,58.

Die Differenzen der an den verschiedenen Stellen beobachteten Δ sind gering und überdies zum Theil wahrscheinlich der bereits S. 24 erwähnten Zunahme des Entladungspotentials mit der Zeit zuzuschreiben, wie die am Schlusse wiederholte Messung in der Plattenmitte, die 2,66 gegen 2,49 anfangs ergab, zeigt. Aus diesem Grunde ist auch der aus den gesammten vorstehenden Beobachtungen abgeleitete absolute Werth von $\frac{\Delta}{V}$, der sich zu 0,148 ergeben würde, unsicher und soll zur Berechnung von e_{11} nicht mit benutzt werden.

Besser noch geht daher die Uebereinstimmung der Gangunterschiede an verschiedenen Stellen der Platte, also die Gleichförmigkeit des elektrischen Feldes in der Platte, aus der nachstehenden Beobachtungsreihe hervor, bei welcher das Entladungspotential (ebenfalls für $a = 0{,}5$) vor und nach jedem Satze von optischen Beobachtungen in der früher angegebenen Weise mittelst des Bifilar-Elektrometers, dessen feste Kugel mit der inneren Belegung der Maassflasche verbunden war, bestimmt wurde. Die Werthe α, welche links über und unter jeder einzelnen Tabelle angegeben sind, bedeuten den mittleren bei mehreren Entladungen beobachteten Elektrometerausschlag in Scalentheilen, V das daraus

nach dem S. 18—26 erörterten Verfahren berechnete Potential; der Kugelabstand e^0 bei der Nullstellung des Elektrometers betrug 22,8 mm, der Abstand A der Scala vom Spiegel 218 cm, und die Länge der Drähte der Bifilarsuspension hatte den früher mit L_1 bezeichneten Werth. Die Beobachtungsresultate sind in der Reihenfolge angeführt, wie sie erhalten wurden.

		Mitte der Platte.													
α = 67,1. V = 17,2															
	—		5,60						5,97				6,07		
	0	3,31		3,18		3,42		3,63		3,45		3,67		3,71	
	+				0,92		1,13				1,15				
α = 69,0. V = 17,3	Δ		+2,35		—2,37		—2,40		+2,43		—2,41		+2,38		**2,40**

		2 cm vom rechten Rand.									
α = 74,0. V = 17,8											
	—		5,62					5,81			
	0	3,20		3,18		3,34	3,42		3,33		3,47
	+				0,86					0,96	
α = 77. V = 18,1	Δ		+ 2,43		— 2,40			+ 2,44		— 2,44	**2,43**

		1,5 cm vom rechten Rand.					
α = 76. V = 18,0							
	—				5,80		
	0	3,33		3,31		3,33	
	+		0,86				
α = 78. V = 18,2	Δ		—2,46		+ 2,47		**2,47**

		6 mm vom rechten Rand.							
α = 77,5. V = 18,2									
	—		5,85						
	0	3,40		3,35		3,18	3,27		3,27
	+				0,77			0,79	
α = 79,1. V = 18,3	Δ		+ 2,47		— 2,50			— 2,48	**2,48**

		2,5 mm vom rechten Rand.					
α = 80,9. V = 18,5							
	—				5,55		
	0	3,13		3,01		2,92	
	+		0,44				
α = 88. V = 19,1	Δ		—2,63		+ 2,56		**2,60**

Bis hierher war das Entladungspotential beständig gestiegen, vermuthlich in Folge der Oxydation der Entladungsstellen der Maassflaschenkugeln; denn als letztere jetzt gedreht wurden, ergaben sich wieder kleinere Werthe von V.

		2 cm vom linken Rand.					
$\alpha = 69{,}3$. $V = 17{,}35$	—		5,13				
	0	2,70		2,70		2,68	
$\alpha = 69{,}0$. $V = 17{,}41$	+				0,28		
	Δ		+ 2,43		− 2,41		**2,415**

		1,5 cm vom linken Rand.					
$\alpha = 70{,}1$. $V = 17{,}43$	—				5,52		
	0	3,08		3,13		3,14	
$\alpha = 67{,}6$. $V = 17{,}16$	+		0,71				
	Δ		− 2,40		+ 2,38		**2,39**

		1 cm vom linken Rand.					
$\alpha = 67{,}6$. $V = 17{,}16$	—				5,50		
	0	3,15		3,11		3,09	
$\alpha = 69{,}2$. $V = 17{,}35$	+		0,70				
	Δ		− 2,43		+ 2,40		**2,415**

		2 mm vom linken Rand.					
$\alpha = 69{,}4$. $V = 17{,}36$	—				5,13		
	0	2,65		2,67		2,76	
	+		0,17				
	Δ		− 2,49		+ 2,41		**2,45**

Nach Drehung der Platte um 180°:

		Mitte.					
$\alpha = 67{,}2$. $V = 17{,}13$	—				5,78		
	0	3,37		3,37		3,37	
$\alpha = 71{,}5$. $V = 17{,}63$	+		0,98				
			−2,39		+ 2,41		**2,40.**

Es sei zunächst darauf hingewiesen, dass sich die Werthe von Δ bei gleicher positiver und negativer Ladung hier stets nahezu entgegengesetzt gleich ergeben haben. Anzeichen für das Vorhandensein einer optischen Wirkung 2ter Ordnung, d. h. einer solchen, die sich mit dem Moment nicht umkehrt, sind also nicht zu erkennen. — Die Nullstellung des Compensators zeigte bei den ersten Beobachtungssätzen nach jeder Entladung eine kleine Verschiebung in dem zur Streifenverschiebung bei der vorhergehenden Ladung entgegengesetzten Sinne. Dieselbe erklärt sich wahrscheinlich durch oberflächliche Leitungsfähigkeit der Quarzplatte, die es ermöglichte, dass sich zwischen letzterer und den Glimmerplatten eine elektrische Belegung von entgegengesetztem Vorzeichen, wie die Ladung der Stanniolbelege, bildete, die im Moment der Entladung nicht sofort wieder verschwand und somit in der Quarzplatte eine schwache Polarisation von entgegengesetztem Vorzeichen, wie diejenige bei der vorhergehenden Ladung war, inducirte. Im

Verlaufe der Versuche ist diese Leitungsfähigkeit offenbar fast ganz verschwunden und konnte kaum zu merklichen Fehlern der Werthe $\varDelta$ Veranlassung geben. Wir werden aber sehen, dass sie bei späteren Beobachtungen an kleineren Platten viel stärkeren Einfluss hatte.

Um die bei der obigen Versuchsreihe an den verschiedenen Stellen der Platte gefundenen Werthe $\varDelta$ mit einander vergleichen zu können, hat man sie auf gleiche Feldstärke zu reduciren, was dadurch geschieht, dass man sie durch den Mittelwerth der vor und nach dem betreffenden Beobachtungssatz bestimmten Potentiale V dividirt. Man findet dann für die verschiedenen Stellen der Platte folgende Werthe von $\frac{\varDelta}{V}$, d. h. des durch die Potentialdifferenz 1 erzeugten Gangunterschiedes in Umdrehungen der Compensatorschraube:

2 mm vom l. Rd.	1 cm vom l. Rd.	1,5 cm vom l. Rd.	2 cm vom l. Rd.	Mitte	2 cm vom r. Rd.	1,5 cm vom r. Rd.	6 mm vom r. Rd.	2,5 mm vom r. Rd.
0,1412	0,1395	0,1383	0,1395	0,1392 0,1382	0,1368	0,1365	0,1360	0,1384.

Das Gesammtmittel hieraus ist

$$\frac{\varDelta}{V} = \mathbf{0{,}1385}, \text{ woraus folgt } \frac{\varDelta}{\partial V/\partial n} = 0{,}1385 \cdot 0{,}337 = \mathbf{0{,}0466}.$$

Wie man sieht, differiren die auf verschiedene Stellen (Parallele zu Y^0) bezüglichen Werthe von $\frac{\varDelta}{V}$ nur um wenige Procente, und eine Abnahme nach den Rändern der Platte hin ist bis zum Abstand 2 mm von letzteren noch nicht zu bemerken; es ist also innerhalb dieser Grenzen einerlei, an welcher Stelle der Platte der Gangunterschied gemessen wird. Geht man dagegen noch näher an die Ränder (d. h. die nahezu zu Y^0 parallelen Schmalseiten der Platte) heran, so tritt eine merkliche A b n a h m e des Gangunterschiedes $\frac{\varDelta}{V}$ ein, wie folgende Beobachtungen zeigen.

		1 mm vom linken Rand.						
$\alpha = 19{,}5$ ($e^0 = 40{,}4$). $V = 16{,}65$								
	—		5,40					
	0	3,47		3,35	3,64		3,76	
	+					1,52		
$\alpha = 19{,}5$. $V = 16{,}65$								
	$\varDelta$		+ 1,99			— 2,18		**2,08.** $\frac{\lvert\varDelta\rvert}{V} = 0{,}1257.$

		1 mm vom rechten Rand.							
$\alpha = 19{,}3$. $V = 16{,}55$									
	—		4,54						
	0	2,46		2,42 |	2,63		2,80		2,90
	+					0,73		0,82	
$\alpha = 19{,}2$. $V = 16{,}51$									
	$\varDelta$		+ 2,10			— 1,99		— 2,03	**2,04.** $\frac{\varDelta}{V} = 0{,}1235.$

Da in 2 mm Entfernung noch keine Verminderung von $\frac{\varDelta}{V}$ nachweisbar war,

so wird man etwa so rechnen können, als ob in einem Streifen von 2 mm Breite an jedem Rande $\frac{\Delta}{V}$ um ca. 0,014 oder ca. 10 Procent kleiner wäre, als der Werth im Innern der Platte. Dasselbe wird aber wahrscheinlich auch für entsprechende Streifen entlang dem vorderen und hinteren Plattenrande gelten, so dass auf einer Strecke von insgesammt 4 mm die relative Verzögerung um $\frac{1}{10}$ ihres Werthes verkleinert wäre, und somit die gesammte beobachtete Verzögerung auf der Strecke von 44,7 mm um $\frac{1}{10} \cdot \frac{4}{44,7}$, d. i. etwas weniger als $\frac{1}{110}$, kleiner wäre, als im Falle überall bis an die Plattenränder constanter optischer Wirkung. Danach würden also die in der Richtung Y_0 an der Platte No. 1 beobachteten Gangunterschiede um etwa 0,9 Procent zu vergrössern sein, um die wahren, dem in Rechnung gezogenen Potentialgefälle entsprechenden Werthe zu erhalten. Indessen soll diese kleine Correction, da sie doch nur auf einer ziemlich unsicheren Schätzung beruht, nicht angebracht werden. — Die Ursache dieser Abnahme des Gangunterschiedes nach den Plattenrändern hin ist darin zu erblicken, dass dort die Kraftlinien wegen der Nähe der Ränder der Metallbelegungen, die nur wenige mm über die Plattenränder hinausragten, bereits etwas nach aussen ausgebogen waren, und dass auch das elektrische Feld daselbst durch eine etwa vorhandene geringe oberflächliche Leitungsfähigkeit des Quarzes in viel stärkerem Maasse geschwächt werden konnte, als im mittleren Theile der Platte. Eben aus diesem letzteren Grunde ist es sehr unsicher, ob der fraglichen Correction in allen Fällen der gleiche Betrag beizulegen wäre. Es muss daher genügen, dass durch die vorstehend besprochenen Versuche gezeigt ist, dass diese Fehlerquelle jedenfalls nur von sehr geringem Einfluss war. —

Es handelte sich nun weiter darum, die Proportionalität der relativen Verzögerung mit dem Potentialgefälle, welche in der Theorie vorausgesetzt ist, zu prüfen, also Δ bei verschieden starker Ladung zu messen. Hierzu diente zunächst eine ältere Beobachtungsreihe, bei welcher zur Potentialmessung nur die Schlagweite an der Maassflasche benutzt wurde, und die daher, weil Temperatur und Luftdruck nicht bekannt waren, allerdings keine ganz sicheren absoluten Werthe von $\frac{\Delta}{V}$ ergeben, aber doch zur Vergleichung der bei verschiedenen Potentialen gefundenen Werthe verwendet werden konnte. Ihre Resultate sind nachstehend in derselben Weise wie früher wiedergegeben; über jeder einzelnen Gruppe ist die Schlagweite in Theilen des an der Maassflasche befindlichen Maassstabes und das entsprechende Entladungspotential nach der Tabelle S. 25 angegeben. Sämmtliche Messungen wurden in der Mitte der Platte angestellt.

	$a = 0,47.\ V = 16,4$									
—				6,03				6,02		
0	3,60		3,56		3,69		3,65			
+		1,25				1,29				
Δ		−2,33		+2,40		−2,38			**2,37.**	$\frac{\Delta}{V}$ = **0,1444.**

$a = 0{,}52$. $V = 17{,}76$.

—		6,20				6,24			
0	3,66		3,69		3,65		3,66		
+				1,09				1,10	
Δ		+ 2,53		— 2,58		+ 2,58			**2,56.**

$\frac{\Delta}{V} =$ **0,1440.**

$a = 0{,}57$. $V = 19{,}06$.

—				6,51				6,52		
0	3,69		3,69		3,74		3,74		3,76	
+		0,97				0,95				
Δ		—2,72		+ 2,80		—2,79		+ 2,77		**2,77.**

$\frac{\Delta}{V} =$ **0,1452.**

$a = 0{,}62$. $V = 20{,}29$.

—				7,00				6,98	
0	3,92		3,98		4,01		4,02		
+		0,99				0,96			
Δ		—2,96		+ 3,05		— 3,055			**3,01.**

$\frac{\Delta}{V} =$ **0,1482.**

$a = 0{,}67$. $V = 21{,}55$.

—				7,27				
0	4,06		4,08		4,10		4,12	
+		0,86				0,85		
Δ		— 3,21		+ 3,18		—3,26		**3,22.**

$\frac{\Delta}{V} =$ **0,1494.**

$a = 0{,}72$. $V = 22{,}82$.

—		7,46				7,54			7,66		
0	4,17		4,19		4,18		4,20			4,28	
+				0,76				0,81			
Δ		+ 3,28		— 3,42		+ 3,35		—3,39		+ 3,38	**3,38.**

$\frac{\Delta}{V} =$ **0,1480.**

$a = 0{,}77$. $V = 24{,}09$.

—		8,27				8,35				
0	4,72		4,75		4,79		4,83		4,85	
+				1,12				1,22		
Δ		+ 3,53		— 3,65		+ 3,54		— 3,62		**3,58.**

$\frac{\Delta}{V} =$ **0,1484.**

$a = 0{,}82$. $V = 25{,}34$.

—				8,74				8,74		
0	4,88		4,92		4,96		4,92		4,96	
+		1,00				1,00				
Δ		— 3,90		+ 3,80		— 3,94		+ 3,80		**3,88.**

$\frac{\Delta}{V} =$ **0,153.**

$a = 0{,}87$. $V = 26{,}6$.

—		8,90				9,06				9,09		
0	4,98		5,00		5,06		5,11		5,09		5,13	
+				0,97				1,03				
Δ		+ 3,91		— 4,06		+ 3,98		— 3,97		+ 3,98		**3,98.**

$\frac{\varDelta}{V} =$ **0,1495.**

$a = 0{,}92$. $V = 27{,}85$.

—		9,28				9,28				
0	5,18		5,18		5,20		5,20		5,22	
+				1,06				0,95		
Δ		+ 4,10		— 4,13		+ 4,08		— 4,26		**4,14.**

$\frac{\varDelta}{V} =$ **0,1485.**

$a = 0{,}97$. $V = 29{,}1$.

—				9,66				9,62		
0	5,33		5,37		5,38		5,40		5,38	
+		0,95				0,99				
Δ		— 4,40		+ 4,29		— 4,40		+ 4,23		**4,33.**

$\frac{\varDelta}{V} =$ **0,1488.**

$a = 1{,}02$. $V = 30{,}35$.

—		9,85				9,93				
0	5,40		5,38		5,43		5,42		5,44	
+				0,85				0,87		
Δ		+ 4,46		— 4,55		+ 4,50		— 4,56		**4,52.**

$\frac{\varDelta}{V} =$ **0,1491.**

Die Werthe von $\frac{\varDelta}{V}$ stimmen so gut überein, dass man die Proportionalität von $\varDelta$ (also auch $\omega_1^2 - \omega_2^2$) mit V oder $\partial V/\partial n$ innerhalb der Grenzen der hier angewandten Potentialgefälle (48,7 bis 93,7) als erwiesen ansehen kann. Dies zeigt noch besser folgende Zusammenstellung der mit dem Mittelwerth aus allen hier gefundenen Werthen $\frac{\varDelta}{V}$, nämlich mit

$$\frac{\varDelta}{V} = \mathbf{0{,}1484}$$

berechneten Werthe von $\varDelta$ mit den beobachteten.

V	16,4	17,8	19,1	20,3	21,6	22,8	24,1	25,35	26,6	27,85	29,1	30,35
Δ ber.	2,43	2,64	2,83	3,01	3,21	3,39	3,58	3,77	3,95	4,13	4,32	4,50
Δ beob.	2,37	2,56	2,77	3,01	3,22	3,38	3,58	3,88	3,98	4,14	4,33	4,52
Differenz	+0,06	+0,08	+0,06	+0,00	—0,01	+0,01	+0,00	—0,11	—0,03	—0,01	—0,01	—0,02.

Bis auf wenige Fälle, wo wohl die Einstellung der Kugeln der Maassflasche ungenau war, liegen die Differenzen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler.

Die Constanz von $\frac{\varDelta}{V}$ wurde durch eine Anzahl späterer Messungen bestätigt, bei denen das Potential mittelst des Bifilar-Elektrometers bestimmt wurde.

Von diesen Beobachtungsreihen beziehen sich nur zwei auf verhältnissmässig hohe Potentiale, entsprechend den Schlagweiten 0,7 und 1,0; ihre Resultate, in derselben Weise angegeben wie diejenigen der analogen Beobachtungsreihe bei der Schlagweite 0,5, sind folgende (beobachtet in der Mitte der Platte).

		$a = 0{,}7.$ $e^0 = 22{,}8$ mm.						
$\alpha = 135{,}4.$ $V = 22{,}3$	—		6,28					
	0	3,30		3,23		3,32		
	+				0,20			
$\alpha = 134{,}5.$ $V = 22{,}24$	$\varDelta$		+ 3,015		— 3,075		**3,045.**	$\frac{\varDelta}{V} =$ **0,1366.**

		$a = 1{,}0.$ $e^0 = 40{,}4$ mm.						
$\alpha = 66{,}4.$ $V = 29{,}5$	—				7,20			
	0	4,40		4,48 | 3,14		2,88		
	+		0,30					
$\alpha = 68{,}6.$ $V = 30{,}1$	$\varDelta$		— 4,14		+ 4,19		**4,17.**	$\frac{\varDelta}{V} =$ **0,140.**

Diese Werthe von $\frac{\varDelta}{V}$ stimmen nahe überein mit dem Mittelwerthe $\frac{\varDelta}{V} =$ 0,1385 aus den früher mitgetheilten, an verschiedenen Stellen der Platte bei Potentialen von 17 bis 18 angestellten Messungen.

Bei noch höheren Potentialen zu beobachten, verhinderte das dann eintretende stärkere Zurückspringen der Nullstellung des Compensators nach der Entladung, welches nach dem S. 107 Gesagten wahrscheinlich eine Folge der für so hohe Spannungen nicht mehr genügenden Isolation der Quarzplattenoberfläche ist.

Bei kleineren Potentialen (unter 15 c. g. s.) war die Elektricitätszerstreuung hinreichend langsam, dass man direct correspondirende Werthe des Gangunterschiedes $\varDelta$ und Elektrometerausschlages α beobachten konnte, statt wie vorher die Maassflasche einzuschalten und $\varDelta$ für das jeweilige Entladungspotential zu bestimmen.

Eine erste Beobachtungsreihe, bei welcher $e_0 = 22{,}8$ war, ergab folgende zusammengehörige Ausschläge α, daraus nach I § 3 *b* berechnete Potentiale V, und Verzögerungen $\varDelta$ bezw. $\frac{\varDelta}{V}$:

α	V	$\varDelta$	$\frac{\varDelta}{V}$
42,0	+ 13,94	— 1,93	} 0,1375
42,0	— 13,94	+ 1,91	
27,7	+ 11,47	— 1,58	0,1378
20,6	+ 10,0	— 1,37	0,1368
15,5	+ 8,75	— 1,23	0,1405
9,8	+ 6,98	— 1,00	} 0,1412
9,8	— 6,98	+ 0,98	
		Mittel:	**0,1387.**

Um bei noch kleineren Potentialen beobachten zu können, wurde der Kugelabstand e^0 bis auf 19,3 mm verkleinert; der Reductionsfactor $f = V : V'$ werde für diesen Fall = 0,98 angenommen. Die nachstehenden Beobachtungen wurden während einer und derselben, allmählich abnehmenden Ladung gemacht; die Einstellung des Compensators nach Entladung war dabei sehr nahe dieselbe, wie vor der Ladung geblieben.

α	V	Δ	$\frac{\Delta}{V}$
28	10,32	1,48	0,1435
23	9,15	1,34	0,146
18,8	8,3	1,15	0,138
13	6,97	0,97	0,140
10	6,15	0,82	0,133
8	5,52	0,72	0,130
6,9	5,12	0,65	0,126
6,0	4,77	0,61	0,127
			Mittel: **0,135.**

Nachstehend sind die mit dem Mittelwerth aus beiden Reihen:

$$\frac{\Delta}{V} = \mathbf{0{,}137}$$

berechneten Werthe Δ mit den beobachteten zusammengestellt.

V	13,94	11,47	10,3	10,0	9,15	8,75	8,3	6,98	6,97	6,15	5,52	5,12	4,77
Δ ber.	1,91	1,57	1,41	1,37	1,25	1,20	1,14	0,96	0,96	0,84	0,75	0,70	0,65
Δ beob.	1,92	1,58	1,48	1,37	1,34	1,23	1,15	0,99	0,97	0,82	0,72	0,65	0,61
Differenz	−0,01	−0,01	−0,07	0,00	−0,09	−0,03	−0,01	−0,03	−0,01	+0,02	+0,03	+0,05	+0,04.

Auch hier übersteigen die Abweichungen nur in wenigen Fällen die directen Beobachtungsfehler, und die relativ grossen Verschiedenheiten der Werthe $\frac{\Delta}{V}$ bei den kleinsten angewandten Potentialen rühren wohl hauptsächlich von der Ungenauigkeit der Ablesungen von α her. Im Ganzen bestätigt sich jedenfalls auch hier für Potentiale zwischen 5 und 14 die Proportionalität von Δ und V bezw. $\frac{\partial V}{\partial n}$. Mit dem hier gefundenen Werthe $\frac{\Delta}{V} = 0{,}137$ erhält man für die höheren Potentiale

$$V = 22{,}27 \qquad 29{,}8$$
$$\Delta = 3{,}05 \qquad 4{,}08$$

während beobachtet ist

$$\Delta = 3{,}045 \qquad 4{,}17.$$

Somit kann die Proportionalität zwischen Gangunterschied und Feldstärke innerhalb der Grenzen 4,77 : 0,337 = 14 und 29,8 : 0,337 = 88,5 der letzteren als erwiesen gelten. —

Aus den Beobachtungen, bei welchen die Quarzplatte zwischen mit Stanniol belegten Glimmerplatten lag und das Potential mit dem Bifilar-Elektrometer gemessen wurde (— diejenigen, bei welchen nur die Schlagweite beobachtet wurde, müssen wegen des Einflusses der nicht mehr bekannten Temperatur und des Luftdruckes hier ausgeschlossen werden —), ergeben sich schliesslich die folgenden Mittelwerthe:
aus den Beobachtungen an zahlreichen verschiedenen Stellen der Platte bei Potentialen von ca. 18 c. g. s.

$$\frac{\varDelta}{V} = \mathbf{0{,}1385},$$

aus den Beobachtungen bei höheren Potentialen (22,3 und 29,8)

$$\frac{\varDelta}{V} = \mathbf{0{,}1383},$$

aus den Beobachtungen bei niedrigen Potentialen von 7 bis 14 (unter Fortlassung der zweiten, unsichereren Beobachtungsreihe bei $e^0 = 19{,}3$)

$$\frac{\varDelta}{V} = \mathbf{0{,}1387}.$$

Insgesammt folgt hieraus:

$$\frac{\varDelta}{V} = \mathbf{0{,}1385}, \text{ und } \frac{\varDelta}{\partial V / \partial n} = \mathbf{0{,}0467}.$$

Es wurden endlich noch Beobachtungen angestellt, wobei die Quarzplatte direct zwischen den auf die Potentialdifferenz V gebrachten Belegungen, in diesem Falle zwei über die Ränder der Quarzplatte ringsum etwa 2 mm hinausragenden Kupferplatten, lag, also ohne durch Glimmerplatten von ihnen isolirt zu sein. Bei dieser Anordnung konnte sicher keine Abschwächung des Feldes in der Quarzplatte durch oberflächliche Leitungsfähigkeit stattfinden, da ja auf ihren Breitseiten jederzeit dasselbe Potential herrschen musste, wie auf den anliegenden Metallplatten. In der That wurde das Zurückgehen der Nullstellung des Compensators über ihren Anfangswerth nach der Entladung, welches bei zwischengelegten Glimmerplatten bei Anwendung hoher Spannungen beobachtet wurde und durch eine zwischen der Quarzplatte und den Glimmerplatten inducirte elektrische Schicht zu erklären ist, jetzt gar nicht mehr bemerkt. Die Potentialdifferenz konnte, damit zwischen den Rändern der Kupferplatten keine Entladungen eintraten, nicht so gross wie früher gemacht werden; sie betrug bei allen Messungen **13,1**, entsprechend einem Elektrometerausschlage $\alpha = 30$, während $A = 210{,}5$, $e^0 = 24{,}8$ mm war. Dieses Potential blieb während der einzelnen Compensatoreinstellungen genügend constant, da die Capacität noch durch Einschalten mehrerer grosser Leydener Flaschen gegen früher vergrössert war.

Eine erste Beobachtungsreihe lieferte folgende Ergebnisse.

	Etwas rechts von der Mitte.													
—		3,26		3,25		3,24								
0	1,36		1,36		1,38		1,38 | 1,39		1,37		1,35		1,35	
+								—0,50		—0,48		—0,54		
Δ		+1,90		+1,88		+1,86		—1,88		—1,84		—1,89		**1,875**

	In der Mitte.															
—								3,94		3,94		3,93		3,91		
0	2,15		2,12		2,10		2,10 | 2,09		2,09		2,055		2,055		2,05	
+		0,26		0,22		0,22										
Δ		—1,875		—1,89		—1,88		+1,85		+1,87		+1,875		+1,86		**1,873**

	Etwas links von der Mitte.													
—		3,95		3,91		3,895								
0	2,04		2,04		2,02		2,04		2,03		2,01		2,00	
+								0,145		0,16		0,135		
Δ		+1,91		+1,88		+1,865		—1,89		—1,86		—1,87		**1,879.**

Gesammtmittel $|\Delta| = $ **1,876.**

Eine zweite Beobachtungsreihe (nachdem die Platten neu aufgelegt waren) ergab:

	In der Mitte.																	
—										4,00		3,96		4,00		3,97		
0	1,94		1,97		2,00		2,06		2,03		2,07		2,05		2,08		2,04	
+		0,00		0,07		0,12		0,09										
Δ		—1,955		—1,915		—1,91		—1,955		+1,95		+1,90		+1,935		+1,91		**1,929**

	2 cm vom rechten Rand.													
—		4,70		4,67		4,72								
0	2,80		2,83		2,75		2,75 | 2,67		2,67		2,63		2,64	
+								0,72		0,69		0,73		
Δ		+1,885		+1,88		+1,97		—1,96		—1,96		—1,895		**1,923**

	1 cm vom rechten Rand.													
—								4,17		4,18		4,175		
0	2,23		2,20		2,19		2,23 | 2,21		2,23		2,21		2,20	
+		0,26		0,24		0,25								
Δ		—1,955		—1,955		—1,96		+1,95		+1,96		+1,97		**1,958**

	2 cm vom linken Rand.															
—		4,215		4,22		4,23		4,19								
0	2,305		2,305		2,30		2,26		2,26		2,21		2,23		2,19	
+										0,26		0,29		0,26		
$\varDelta$		+1,91		+1,92		+1,95		+1,93		—1,975		—1,93		—1,95		**1,938**

	1 cm. vom linken Rand.															
—								3,80		3,76		3,76		3,72		
0	1,98		1,98		1,95		1,94		1,88		1,83		1,83		1,80	
+		0,01		0,04		0,035										
$\varDelta$		—1,97		—1,925		—1,91		+1,89		+1,905		+1,93		+1,905		**1,920.**

Gesammtmittel: $|\varDelta| =$ **1,934.**

Ausserdem wurde noch eine Beobachtungsreihe mit Natriumlicht in der Mitte der Platte ausgeführt, welche ergab

$$\varDelta = \begin{matrix} -1{,}935 & 1{,}96 & 1{,}90 & 1{,}91 & 1{,}875 & 1{,}925 & 1{,}98 \\ +1{,}915 & 1{,}94 & 1{,}91 & 1{,}915 & & & \end{matrix} \Bigg\} \text{ Mittel } \mathbf{1{,}924},$$

also wieder nahezu denselben Werth, wie für weisses Licht, in Uebereinstimmung mit dem schon S. 103 erwähnten hierauf bezüglichen Resultat.

Aus allen Beobachtungen bei direct anliegenden Kupferplatten folgt:

$$\frac{|\varDelta|}{V} = \frac{1{,}913}{13{,}1} = \mathbf{0{,}1455}.$$

Bei Berechnung des Potentialgefälles $\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{V}{D}$ ist hier die grösste Dicke der Quarzplatte in der Mitte einzuführen: $D = 0{,}319$ cm, umsomehr, als die Kupferplatten thatsächlich die Quarzplatte in der Nähe der Ränder nicht ganz vollständig berührten. Man findet dann

$$\frac{\varDelta}{\partial V / \partial n} = \mathbf{0{,}0465},$$

d. i. fast genau derselbe Werth, welcher oben aus den gesammten Beobachtungen mit Belegungen auf Glimmerplatten gewonnen wurde. Der Werth 0,0466 ist also nun zur definitiven Berechnung von $\frac{e_{11}\varkappa_1}{v^2}$ zu benutzen. Die Grösse $\overline{\varDelta}_1 : \frac{m}{\varkappa_1}$ in der Formel 51) ist dem absoluten Werthe nach $= \frac{\varDelta}{23{,}8} : \frac{\partial V}{\partial n}$, und ihr Vorzeichen ist positiv, da $\overline{\varDelta}$ entgegengesetztes Vorzeichen hat wie $\varDelta$ und letztere

Grösse nach den vorstehend mitgetheilten Beobachtungsresultaten negativ ist für positives Moment. Man erhält demnach

$$\bar{\Delta}_1 \cdot \frac{\varkappa_1}{m} = +\frac{0{,}0466}{23{,}8} = \mathbf{+0{,}00196}.$$

Ferner ist in 51) einzusetzen $L^0 = 44{,}7$, $\frac{1}{2} n_o^{0^3} = 1{,}841$, $n_o^0 - n_e^0 = -0{,}0091$ und nach den im nächsten Paragraph mitzutheilenden piëzoelektrischen Beobachtungen $\delta_{11} = -6{,}3 \cdot 10^{-8}$.

Da wir den Abstand der Compensatorstreifen wie für Natriumlicht gleich 23,8 gesetzt haben, so ist auch für λ die Wellenlänge des Natriumlichts zu nehmen. Sonach wird die Gleichung 51):

$$1{,}841 \cdot \frac{e_{11}\varkappa_1}{v^2} + 6{,}3 \cdot 0{,}0091 \cdot 10^{-8} = \frac{589{,}2 \cdot 10^{-6}}{44{,}7} \cdot 0{,}00196 = 2{,}58 \cdot 10^{-8},$$

woraus folgt:

$$\frac{e_{11}\varkappa_1}{v^2} = \mathbf{+1{,}370 \cdot 10^{-8}}.$$

II. Beobachtungen im convergenten Licht in der Richtung der Hauptaxe.

Wie wir schon in § 2, *a* I sahen, macht das starke Drehungsvermögen des Quarzes es unmöglich, den Gangunterschied, welcher in der Richtung Z^0 in Folge dielektrischer Polarisation parallel X^0 (oder irgend einer anderen zu Z^0 senkrechten Richtung) hervorgebracht wird und ebenfalls von der Constante e_{11} abhängt, mit Hülfe des Compensators zu messen. Dieser Gangunterschied, bezw. zunächst das Verhältniss $x = \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{\omega_r^{0^2} - \omega_l^{0^2}}$, kann aber, wie in § 2, *a* II ausgeführt worden ist, dadurch ermittelt werden, dass man die Aenderungen misst, welche die Durchmesser der im convergenten polarisirten homogenen Lichte in einer zur Hauptaxe senkrechten Platte sichtbaren Interferenzringe (Curven gleichen Gangunterschiedes) bei dielektrischer Polarisation der Platte erleiden, ein Beobachtungsverfahren, welches ja schon von den Herren Röntgen, Kundt und Czermak zur qualitativen Untersuchung, von letzterem auch zu vergleichenden Messungen der elektrooptischen Erscheinungen am Quarz angewandt worden ist (vergl. die Bemerkung S. 92—93). Zu diesem Zwecke konnte dieselbe Platte Verwendung finden, an welcher die im vorigen Abschnitt mitgetheilten Compensatorbeobachtungen ausgeführt worden waren, indem man jetzt durch deren kürzere, zur Hauptaxe OZ^0 nahezu senkrechte Schmalseiten hindurch beobachtete. Die Platte wurde, wie bei den Compensatorbeobachtungen zwischen den aussen mit Stanniol belegten Glimmerplatten liegend, mit der Breitseite horizontal auf ein drehbares Tischchen gelegt (*TT* in Fig. 10, welche die Anordnung, von oben gesehen, schematisch darstellt), so dass ihre längsten Kanten zunächst ungefähr parallel

der Beobachtungsrichtung (AB) lagen. Das (in der Figur von A her) einfallende Licht einer Natriumflamme wurde zunächst durch den Polarisator vertikal polarisirt und dann durch eine hinter der Quarzplatte in passender Entfernung

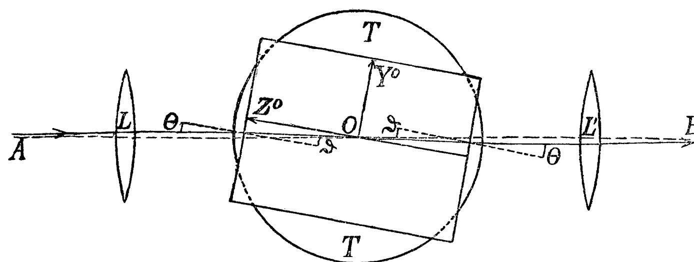


Fig. 10

aufgestellte Linse (L) schwach convergent gemacht. Das Interferenzbild, welches nach dem Durchgang des Lichtes durch eine entsprechende vor der Quarzplatte aufgestellte Linse (L') und den Analysator, dessen Polarisationsebene horizontal war, zu Stande kam, wurde aus geringer Entfernung mit einem kleinen Fernrohr beobachtet.

Wegen der im Verhältniss zu ihrer grossen Länge geringen Dicke der Platte konnte man nicht die ganzen Ringe sehen, sondern nur deren seitliche Segmente; dies genügte aber, weil gemäss der Orientirung der Platte der horizontale Ringdurchmesser (parallel der Y^0-Axe) ein solcher war, welcher bei der Elektrisirung parallel X^0 in die grosse oder kleine Lemniscatenhauptaxe überging. Durch Messung der Verschiebungen der Ringsegmente nach rechts oder links konnten also die in § 2 a II mit $\Theta_h - \Theta_h^0$ und $\Theta_h^0 - \Theta_h'$ bezeichneten Aenderungen des Winkelhalbmessers der Ringe ermittelt werden. Um nun diese Messung auszuführen, konnte man das Tischchen mit der darauf liegenden Platte um eine vertikale Axe um messbare Winkel drehen, und zwar mittelst einer Mikrometerschraube, deren volle Umdrehung eine Drehung des Tischchens um den Winkel $\gamma = 45{,}4'$ oder $= 0{,}0132$ in Bogenmaass hervorbrachte, und deren Kopf in 20 Theile getheilt war. Es wurde nun zunächst durch diese Drehung der Platte das eine seitliche Segment desjenigen Ringes, dessen Erweiterung und Verengerung gerade gemessen werden sollte, zur Berührung mit dem vertikalen Faden des Fernrohres gebracht und die entsprechende Stellung der Mikrometerschraube abgelesen. Wurde dann die mit der Influenzmaschine und der inneren Belegung der Maassflasche (und eventuell noch anderer Leydener Flaschen) verbundene obere Plattenbelegung geladen, während die untere immer zur Erde abgeleitet war, so verschob sich das Ringsegment im Gesichtsfeld des Fernrohres seitwärts, und es musste der Platte eine gewisse Drehung ertheilt werden, um die Berührung des Ringes mit dem Faden wieder herzustellen. Es wurde nun jedesmal diejenige Drehung ausprobirt, die erforderlich war, damit die Berührung gerade im Momente vor der Entladung der Maassflasche bei einer bestimmten Schlagweite eintrat; war die Richtigkeit dieser Einstellung bei einer Reihe von Entladungen controllirt, so wurde die Platte soweit zurückgedreht, dass der Ring bei entladener Plattenbelegung wieder auf dem Faden einstand. Die hierbei

abgelesene Drehung der Platte — oder das Mittel aus der Drehung hin und zurück — ist dann, je nachdem der Ring eine Erweiterung oder Verengerung erfuhr, der in § 2 *a* II mit $\Theta_h - \Theta_h^0$ oder $\Theta_h^0 - \Theta_h'$ bezeichnete Winkel. Es wurden immer jene beiden Winkel bestimmt, indem die Messung sowohl bei positiver als bei negativer Ladung der oberen Plattenbelegung ausgeführt wurde. Auch der ganze ursprüngliche horizontale Ringdurchmesser $2\Theta^0$ konnte durch Drehung der Platte gemessen werden, indem man erst das linke, dann das rechte Segment desselben Ringes auf den vertikalen Faden einstellte. Uebrigens konnte der Werth von Θ^0 auch nach der aus 56) folgenden Formel

$$\sin\Theta_h^0 = n_o^0 \sin\vartheta_h^0 = \frac{n_o^0 \sqrt[4]{\left(h\frac{2\pi}{L\delta^0}\cos\vartheta_h^0\right)^2 - 1}}{\sqrt{k^0}}$$

berechnet werden, worin hier $L = 59{,}9$ zu setzen ist und somit h den Werth 8 annimmt für den ersten Ring, 9 für den zweiten u. s. w. Dabei ergab sich gute Uebereinstimmung mit den gemessenen Werthen; so wurde z. B. berechnet $\Theta_1^0 = 5^0 25'$, $\Theta_2^0 = 6^0 47'$, gemessen $\Theta_1^0 = 7{,}2\gamma = 5^0 27\frac{1}{2}'$, $\Theta_2^0 = 9{,}03\gamma = 6^0 50'$. Bezüglich der folgenden Tabellen ist noch zu bemerken, dass die auf den 1ten, 2ten und 3ten Ring bezüglichen Grössen Θ^0, Θ und Θ' entsprechend mit den Indices 1, 2, 3 bezeichnet sind statt mit den Indices h.

Zunächst seien die Resultate einer älteren Beobachtungsreihe mitgetheilt, bei welcher lediglich die Schlagweite zur Potentialmessung diente, und die nach S. 25 angenommenen absoluten Potentialwerthe wieder einer gewissen Unsicherheit wegen des unbekannten Luftzustandes unterliegen.

Schlagweite $a = 0{,}5$. ($V = 17{,}2$.)

1. Ring: $\Theta_1 - \Theta_1' = 0{,}55\gamma$

2. „ : $\Theta_2 - \Theta_2' = 0{,}45\gamma$.

Schlagweite $a = 1{,}0$. ($V = 29{,}85$.)

1. Ring: $\Theta_1 - \Theta_1' = 0{,}96\gamma$ auf der einen, $= 1{,}00\gamma$ auf der anderen Seite, im Mittel $0{,}98\gamma$.

2. „ : $\Theta_2 - \Theta_2' = 0{,}79\gamma$ „ „ „ , $0{,}82\gamma$ „ „ „ „ , „ „ $0{,}805\gamma$.

Nach Formel 57') berechnet:	$x = 0{,}0364$	aus $\Theta_1 - \Theta_1'$	für $a = 0{,}5$,	$\frac{x}{V} = 2{,}11 \cdot 10^{-3}$
	$= 0{,}0649$	„ „	„ $a = 1{,}0$,	„ $2{,}10 \cdot 10^{-3}$
	$= 0{,}0373$	„ $\Theta_2 - \Theta_2'$	„ $a = 0{,}5$,	„ $2{,}16 \cdot 10^{-3}$
	$= 0{,}0670$	„ „	„ $a = 1{,}0$,	„ $2{,}175 \cdot 10^{-3}$

Mittelwerth von $\frac{x}{V}$: **$2{,}136 \cdot 10^{-3}$**.

Später wurde das Entladungspotential vor und nach jedem Satze optischer Messungen mittelst des Bifilar-Elektrometers bestimmt, in der Weise wie es schon bei den Compensatorbeobachtungen geschah. In der nachstehenden Tabelle sind

in der ersten Columne die dem Entladungspotential (beim Scalenabstand $A = 284{,}5$ cm und dem Kugelabstand $e^0 = 40{,}4$ mm) entsprechenden Elektrometerausschläge α angegeben, in der zweiten die daraus berechneten Potentialwerthe, in den folgenden die beobachteten Ringerweiterungen und Verengerungen $\Theta - \Theta^0$ und $\Theta^0 - \Theta'$, sowie deren Summe $\Theta - \Theta'$ in Theilen von γ, dann in der vorletzten Columne die daraus nach der Formel 57'), worin für Θ_1^0, Θ_2^0, Θ_3^0 ihre für $L = 59{,}9$ berechneten Werthe: $5^0 25'$, $6^0 47'$, $7^0 46'$ gesetzt wurden, abgeleiteten Werthe von x, und endlich in der letzten die durch Division mit dem Mittelwerthe der vor und nach dem betreffenden Versuch gefundenen Potentiale berechneten Werthe von $\frac{x}{V}$.

	α	V	$\frac{\Theta-\Theta^0}{\gamma}$	$\frac{\Theta^0-\Theta'}{\gamma}$	$\frac{\Theta-\Theta'}{\gamma}$	x	$\frac{x}{V}$
1. Ring, links.	85,7 85	29,5 29,4	0,45	0,575	1,025	0,0665	0,00226
2. Ring, links.	93,3	30,56	0,35	0,425	0,775	0,0640	0,00213
3. Ring, links.	89,0 89,0	30,0	0,33	0,37	0,70	0,0662	0,00221
1. Ring, rechts.	89,0 86,3	30,0 29,46	0,45	0,475	0,925	0,0610	0,00204
2. Ring, rechts.	(86,3) 86,8	29,46 29,56	0,36	0,36	0,72	0,0594	0,00202
3. Ring, rechts.	(86,8) 89,2	29,56 30,0	0,325	0,30	0,625	0,0590	0,001975
1. Ring, links, rep.	89,2	30,0	0,44	0,52	0,96	0,0632	0,00211
2. Ring, links, rep.	(89,2) 88,0	30,0 29,72	0,35	0,40	0,75	0,0620	0,00208

Mittelwerthe von $\frac{x}{V}$ aus den Messungen

am 1ten,	2ten,	3ten Ring:
0,00214	0,00208	0,00209,

insgesammt:

$$\frac{x}{V} = \mathbf{0{,}00210}.$$

Nachdem die Platte umgedreht war, so dass jetzt die vorher geladene Fläche zur Erde abgeleitet war und umgekehrt, wurde folgende zweite Beobachtungsreihe erhalten.

	α	V	$\frac{\Theta-\Theta^0}{\gamma}$	$\frac{\Theta^0-\Theta'}{\gamma}$	$\frac{\Theta-\Theta'}{\gamma}$	x	$\frac{x}{V}$
1. Ring, links.	80,7 80,2	28,64	0,45	0,50	0,95	0,0618	0,00216
2. Ring, links.	82,3	28,92	0,33	0,38	0,71	0,0586	0,00204
3. Ring, links.	82,3	28,92	0,30	0,325	0,625	0,0590	0,00204
1. Ring, rechts.	84,4	29,25	0,475	0,475	0,95	0,0621	0,00212
2. Ring, rechts.	84,0	29,18	0,36	0,39	0,75	0,0618	0,002125
3. Ring, rechts.	82,8	29,0	0,35	0,31	0,66	0,0623	0,00214

Mittelwerth von $\frac{x}{V}$ aus den Messungen

am 1ten,	2ten,	3ten Ring:
0,00214	0,00208	0,00209,

insgesammt:

$$\frac{x}{V} = \mathbf{0{,}00210},$$

ebenso aus beiden Beobachtungsreihen zusammen.

Hieraus ergiebt sich nach Formel 58):

$$\frac{e_{11}\varkappa_1}{v^2} = \frac{589{,}2 \cdot 21{,}67}{3{,}68 \cdot 180} \cdot 0{,}00210 \cdot 0{,}337 \cdot 10^{-6} = \mathbf{1{,}36 \cdot 10^{-8}};$$

dagegen folgt aus der ersten, wegen der Potentialmessung mit der Maassflasche allein unsichereren Beobachtungsreihe (S. 119): $\frac{e_{11}\varkappa_1}{v^2} = \mathbf{1{,}38 \cdot 10^{-8}}$.

Dieses Resultat stimmt sehr gut mit demjenigen der Compensatormessungen: $\frac{e_{11}\varkappa_1}{v^2} = \mathbf{1{,}37 \cdot 10^{-8}}$ überein. Dass auch der Sinn der beobachteten Aenderungen dem früher bestimmten positiven Vorzeichen von e_{11} entspricht, ergiebt sich wie folgt. Beobachtet wurde eine Abnahme des horizontalen Ringdurchmessers

bei positiver Ladung derjenigen Seite der Platte, aus welcher die negative X^0-Axe austritt, also bei positivem Moment m; in diesem Falle war also die Ebene der optischen Axen vertikal, d. h. parallel X^0, und folglich $\omega_x > \omega_y$. Nun ist nach den Formeln 50′) $\omega_x^2 - \omega_y^2 = +2e_{11}m$, folglich ergiebt sich aus obiger Beobachtung in der That positives Vorzeichen von e_{11}.

Diese Uebereinstimmung der in I und II gefundenen Resultate liefert eine Bestätigung der allgemeinen Theorie der Aenderung der Doppelbrechung des Quarzes im elektrischen Felde.

III. Compensatorbeobachtungen in Richtungen, welche die Winkel zwischen der Y^0- und Z^0-Axe nahezu halbiren.

Zu diesen Beobachtungen diente eine nahezu quadratische Platte (No. 2) von 3,51 mm Dicke und 20,5 bezw. 20,75 mm Kantenlänge, deren Breitseiten ebenfalls parallel der Y^0Z^0-Ebene und deren Schmalseiten unter 45^0 gegen die Z^0-Axe geneigt sein sollten, aber in Wirklichkeit ein wenig von dieser Orientirung abwichen. Die Abweichung der Plattennormale und somit der Elektrisirungsrichtung von der X^0-Axe bestand in einer Neigung von ca. $2\frac{1}{2}^0$ gegen die Z^0-Axe hin, wie durch Beobachtung der Auslöschungsrichtungen auf den Schmalseiten constatirt wurde. Dieselbe hat sowohl für die wirksame Componente a des inducirten Momentes, als für die Neigung der Beobachtungsrichtungen (Normalen der Schmalseiten) gegen die Z^0-Axe, und somit auch für die beobachteten Gangunterschiede nur Fehler 2ter Ordnung (nämlich von der Grössenordnung von $\sin^2 2\frac{1}{2}^0$) zur Folge und braucht daher nicht berücksichtigt zu werden. Dagegen hat die Abweichung der Neigung der Kanten gegen die Z^0-Axe von dem Winkel $\pm 45^0$ einen merklichen Einfluss und muss, wie es in den Formeln 52) und 53) schon vorgesehen ist, in Rechnung gezogen werden. Jene Neigung der Kanten gegen Z^0 ist nun sehr annähernd gleich der „Auslöschungsschiefe" auf der Breitseite, da deren eine Auslöschungsrichtung mit der Durchschnittslinie der Plattenebene und der Z^0X^0-Ebene zusammenfällt. Auf diese Weise wurde der in § 2, a, S. 87 mit ϑ bezeichnete Winkel für die eine Kantenrichtung $= -44^0 10'$, für die andere $= +45^0 50'$ gefunden. Für die erstere Richtung war $L = 20{,}5$, für die letztere $= 20{,}75$ mm.

Um den ursprünglichen Gangunterschied in einer dieser Beobachtungsrichtungen soweit zu compensiren, dass man mit weissem Licht beobachten konnte, mussten hier zwei andere Platten in den Weg der Lichtstrahlen eingeschaltet werden in der Weise, wie in nebenstehender Figur angedeutet ist, nämlich: erstens eine der zu untersuchenden Platte ganz ähnliche (No. 2′) in solcher Lage, dass ihre Hauptaxe zu derjenigen der ersten Platte senkrecht lag, zweitens eine Platte (1′)

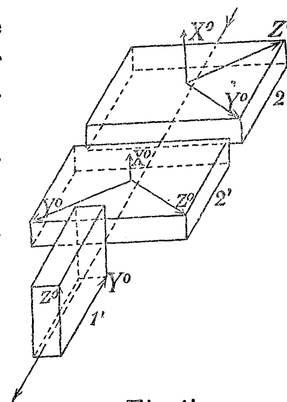


Fig. 11.

von ebenfalls 20,5 mm Länge, in welcher die Hauptaxe Z^0 vertikal, also parallel der X^0-Axe der beiden ersteren Platten lag. Da der Gangunterschied in jeder der Platten (2) und (2') auf gleicher Weglänge halb so gross und von entgegengesetztem Vorzeichen ist, wie in der Platte (1'), so muss der Gangunterschied der beiden Wellen nach Durchgang durch alle drei Platten sehr gering sein und zwar ein absolutes Minimum für die Richtung senkrechten Durchganges. Dass der Gangunterschied ein Minimum (oder Maximum) wird für die Beobachtungsrichtung, ist wesentlich, damit der schwarze Compensatorstreifen scharf und gerade erscheint; daher genügte es nicht, die zweite Platte etwa mit um 90^0 gedrehten Schwingungsrichtungen vor die erste zu stellen, obgleich ja dadurch der Gangunterschied für die Beobachtungsrichtung selbst hätte vollständig compensirt werden können. Vor den Beobachtungen wurden die Schwingungsrichtungen in den drei Platten und im Compensator möglichst gut zur Coincidenz gebracht, und die Nicolhauptschnitte wie früher unter $\pm 45^0$ dagegen gestellt; dann war in der That im weissen Licht ein guter schwarzer Streifen (in einem Falle schwach farbig gesäumt) sichtbar. — Als zunächst versucht wurde, die beschriebene Platte ebenso, wie früher die grosse Platte (1), zwischen mit Stanniol belegten Glimmerplatten dielektrisch zu polarisiren, zeigte sich ein starkes Zurückspringen des Compensatorstreifens nach jeder Entladung über diejenige Lage hinaus, welche er vor der betreffenden Ladung gehabt hatte, eine Erscheinung, die, wie schon früher erörtert wurde, auf eine leitende Oberflächenschicht der Quarzplatte zurückzuführen ist, welche sich hier wegen der ungünstigeren Jahreszeit stärker geltend machte. Ausserdem wurde eine starke Abnahme des Gangunterschiedes gegen den Rand der Platte hin beobachtet, so dass dort das elektrische Feld, ebenfalls wohl durch die eben erwähnte Ursache, erheblich geschwächt zu sein schien. Um diese Störungen durch oberflächliche Leitung sicher zu vermeiden, wurde daher bei den unten anzuführenden Messungen die Platte zwischen zwei ihre Breitseiten direct berührende quadratische, ringsum etwa 1 mm überstehende Messingplatten gelegt, deren untere mit der Erde und deren obere mit der auf ein bestimmtes Potential geladenen Leydener Batterie von 3 oder 4 grossen Flaschen leitend verbunden war. Dank der grossen Capacität der letzteren blieb das Potential während der Einstellungen des Compensators genügend constant. Dasselbe wurde immer auf denjenigen Werth gebracht, bei welchem das Bifilar-Elektrometer einen Ausschlag von 30 mm gab, und welcher sich, da $A = 210{,}5$ und $e^0 = 24{,}8$ mm (sowie $L = L_1$) war, gleich **13,13** (c. g. s.) ergiebt; das Potentialgefälle in der Platte war demnach immer $= \dfrac{13{,}13}{0{,}351} = 37{,}4$. Die Resultate sind nachstehend in analoger Weise, wie unter I diejenigen der Compensatormessungen an der Platte No. 1, zusammengestellt. Das den Zeilen, welche die Compensatorablesungen enthalten, vorangestellte Vorzeichen ist dasjenige des Momentes a. —

Beobachtungsrichtung $\vartheta = +45^\circ 50'$.

	ca. 3 mm vom rechten Rand.														
—		3,10		3,15		3,17									
0	1,55		1,57		1,57		1,62	1,59		1,61		1,55		1,55	
+									−0,01		−0,05		−0,04		
$\varDelta$		+1,54		+1,58		+1,575			−1,61		−1,585		−1,59		**1,580**

	ca. 7 mm vom rechten Rand.												
—								3,82		3,73		3,76		
0	2,19		2,16		2,16		2,19		2,20		2,18		2,18	
+		0,60		0,62		0,61								
$\varDelta$		−1,575		−1,54		−1,565		+1,625		+1,54		+1,58		**1,571**

	Mitte.													
—		3,53		3,48		3,53								
0	1,97		1,97		1,97		1,99		1,99		2,03		2,04	
+								0,42		0,46		0,45		
$\varDelta$		+1,56		+1,51		+1,55		−1,57		−1,55		−1,585		**1,554**

	7 mm vom linken Rand.														
—									3,48		3,47		3,46		
0	1,78		1,78		1,74		1,73	1,85		1,88		1,87		1,88	
+		0,17		0,15		0,14									
$\varDelta$		−1,61		−1,61		−1,605			+1,615		+1,595		+1,585		**1,603**

	3 mm vom linken Rand.														
—		3,53		3,49		3,51									
0	1,88		1,89		1,89		1,89	1,78		1,78		1,73		1,74	
+									0,21		0,17		0,11		
$\varDelta$		+1,645		+1,60		+1,62			−1,57		−1,585		−1,625		**1,608.**

Gesammtmittel: $|\varDelta| = \mathbf{1,583}$,

daraus mit Rücksicht auf das Vorzeichen: $\bar{\varDelta}_2 = +\mathbf{0,0666}$,

$$\frac{\bar{\varDelta}_2 \lambda}{L^0 \cdot \frac{m}{\varkappa_1}} = \frac{0,0666 \cdot 589,2}{20,5 \cdot 37,4} \cdot 10^{-6} = +\mathbf{5,11 \cdot 10^{-8}}.$$

Dass auch hier die Berechnung mit den für Natriumlicht gültigen Constanten 23,8 und $589,2 \cdot 10^{-6}$ zulässig ist, d. h. dass es einerlei ist, ob man die Verschiebung des schwarzen Streifens mit weissem Licht oder Natriumlicht beobachtet, zeigt folgende mit Natriumlicht erhaltene Beobachtungsreihe, die bei gleichem Ladungspotential in der Mitte der Platte ausgeführt wurde.

—		3,69		3,68		3,72												
0	2,14		2,16		2,16		2,20		2,06		2,04		2,10		2,09		2,03	
+								0,55		0,54		0,56		0,49		0,46		
Δ		+1,54		+1,52		+1,54		−1,58		−1,51		−1,51		−1,605		−1,60		**1,545.**

Der Unterschied zwischen diesem Werthe und dem entsprechenden für weisses Licht gefundenen: 1,554 liegt innerhalb der Fehlergrenzen. Somit kann man auch hier die Gangunterschiede $(\omega_1 - \omega_2)$, welche mit weissem Licht bestimmt sind, als für Natriumlicht gültig ansehen. Da dieselben nun (nach S. 88) nahe proportional mit $\frac{3}{2} e_{11} + e_{41}$ sind, und die Beobachtungen an der grossen Platte (No. 1) gezeigt hatten, dass die Constante e_{11} für mittleres „weisses“ Licht und für Natriumlicht sehr nahe übereinstimmende Werthe besitzt, so kann letzteres aus dem jetzt gefundenen Resultat auch bezüglich der anderen elektrooptischen Constante des Quarzes, e_{41}, gefolgert werden. — Alle folgenden Beobachtungen beziehen sich auf weisses Licht.

Beobachtungsrichtung $\vartheta = -44^{\circ} 10'$.

	ca. 3½ mm vom linken Rand.														
—									2,25		2,21		2,17		
0	1,25		1,26		1,28		1,26	1,27		1,27		1,27		1,27	
+		0,36		0,35		0,32									
Δ		−0,895		−0,92		−0,95			+0,98		+0,94		+0,90		**0,921**

	7 mm vom linken Rand.													
—		2,80		2,81		2,79								
0	1,86		1,85		1,88		1,88		1,90		1,91		1,92	
+								1,04		1,03		1,05		
Δ		+0,945		+0,945		+0,91		−0,85		−0,875		−0,865		**0,898**

	Mitte.															
—										2,25			2,20		2,24		
0	1,23		1,27		1,29		1,28		1,27		1,31	1,27		1,28		1,32	
+		0,27		0,36		0,31		0,36									
Δ		−0,98		−0,92		−0,975		−0,915		+0,96			+0,925		+0,94		**0,945**

	7 mm vom rechten Rand.													
—		2,67		2,73		2,73								
0	1,76		1,78		1,77		1,77		1,79		1,75		1,78	
+								0,87		0,82		0,83		
Δ		+0,90		+0,955		+0,960		−0,91		−0,95		−0,935		**0,935**

	3½ mm vom rechten Rand.															
—									2,11		2,15			2,16		
0	1,18		1,18		1,18		1,18	1,22		1,20		1,20 |	1,22		1,26	
+		0,25		0,30		0,26										
$\varDelta$		−0,93		−0,88		−0,92			+0,90		+0,95			+0,92		**0,917**

	Knapp 1 mm vom rechten Rand.							
—		1,88		1,85		1,87		
0	1,02		0,97		0,96		0,97	
		+ 0,885		+ 0,885		+ 0,905		**0,892.**

Wie man sieht, ist die Abnahme des Gangunterschiedes gegen den Rand der Platte hin hier sehr gering und braucht nicht weiter berücksichtigt zu werden. Ausserdem zeigen beide Tabellen, dass die Einstellung des Compensators für entladene Belegungen auch nach mehrmaliger Ladung meist sehr gut constant blieb, also keinerlei Nachwirkung der dielektrischen Polarisation vorhanden war; und ferner, dass die absoluten Werthe der positiven und negativen $\varDelta$ durchschnittlich nahe gleich waren.

Der Mittelwerth aus allen $|\varDelta|$ für die letzte Beobachtungsrichtung ist **0,923**, woraus folgt

$$\bar{\varDelta}_3 = +\mathbf{0{,}0388},$$

$$\frac{\bar{\varDelta}_3 \lambda}{L^0 \cdot \dfrac{m}{\varkappa_1}} = +\frac{0{,}0388 \cdot 589{,}2}{20{,}75 \cdot 37{,}4} \cdot 10^{-6} = +\mathbf{2{,}94 \cdot 10^{-8}}.$$

Relativ ist $\bar{\varDelta}_3$ wegen seiner erheblich geringeren Grösse natürlich weniger genau bestimmt als $\bar{\varDelta}_1$ und $\bar{\varDelta}_2$. Das Vorzeichen ist in allen 3 Fällen dasselbe, da stets bei positivem Moment der Compensator, dessen Spalt immer parallel den Kraftlinien war, auf kleinere Zahlen gedreht werden musste, entsprechend positivem $\bar{\varDelta}$.

Nach den Formeln 52) und 53), in welchen $\delta\vartheta = +50' \cdot \dfrac{\pi}{10800'} = +0{,}01454$, ferner nach den im folgenden § mitzutheilenden Bestimmungen $\delta_{11} = -6{,}27 \cdot 10^{-8}$, $\delta_{14} = +1{,}93 \cdot 10^{-8}$ zu setzen ist, erhält man jetzt folgende zwei Gleichungen für $\dfrac{e_{11}\varkappa_1}{v^2}$ und $\dfrac{e_{41}\varkappa_1}{v^2}$:

$$+5{,}11 \cdot 10^{-8} = \frac{e_{11}\varkappa_1}{v^2}(2{,}77 - 1{,}86 \cdot 0{,}0145) + \frac{e_{41}\varkappa_1}{v^2} \cdot 1{,}858 + 0{,}0091 \cdot 2{,}05 \cdot 10^{-8}$$

$$+2{,}94 \cdot 10^{-8} = \frac{e_{11}\varkappa_1}{v^2}(2{,}77 + 1{,}86 \cdot 0{,}0145) - \frac{e_{41}\varkappa_1}{v^2} \cdot 1{,}858 + 0{,}0091 \cdot 1{,}09 \cdot 10^{-8}.$$

Aus denselben folgt durch Addition (wobei das vom Orientirungsfehler herrührende Glied fortfällt):

$$8{,}05 \cdot 10^{-8} - 0{,}0091 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-8} = 5{,}54 \cdot \frac{e_{11}\varkappa_1}{v^2},$$

$$\frac{e_{11}\varkappa_1}{v^2} = +\mathbf{1{,}448 \cdot 10^{-8}},$$

während aus den Compensatorbeobachtungen parallel Y^0 an der grossen Platte No. 1 der Werth $+\mathbf{1{,}370 \cdot 10^{-8}}$ gefunden war (dagegen 1,468 aus der weniger sicheren Beobachtungsreihe, welche zufolge S. 109 u. 114 nicht definitiv berücksichtigt werden sollte). Der Werth $1{,}37 \cdot 10^{-8}$ muss als der zuverlässigere gelten, theils weil die Bestimmung von $\varDelta_1$ an sich relativ genauer war, als die von $\varDelta_2$ und $\varDelta_3$, theils weil letztere Grössen durch Abweichungen der Beobachtungsrichtung von der Plattennormale, die bis zum Betrage von 1 bis 2^0 wohl möglich waren, merklich und zwar in verschiedenem Grade beeinflusst sein können, da im Falle solcher Abweichungen die Correctionsgrösse $\delta\vartheta$ in 52) und 53) nicht den oben vorausgesetzten Werth hätte. —

Durch Subtraction der zweiten der obigen Gleichungen von der ersten folgt:

$$2{,}17 \cdot 10^{-8} = -1{,}86 \cdot 0{,}029 \cdot \frac{e_{11}\varkappa_1}{v^2} + 2 \cdot 1{,}858 \cdot \frac{e_{41}\varkappa_1}{v^2} + 0{,}0091 \cdot 0{,}96 \cdot 10^{-8},$$

oder, wenn man $\frac{e_{11}\varkappa_1}{v^2} = +1{,}4 \cdot 10^{-8}$ einsetzt:

$$\frac{e_{41}\varkappa_1}{v^2} \cdot 2 \cdot 1{,}858 = (2{,}17 + 0{,}076 - 0{,}00875) \cdot 10^{-8} = 2{,}237 \cdot 10^{-8},$$

$$\frac{e_{41}\varkappa_1}{v^2} = +\mathbf{0{,}602 \cdot 10^{-8}}.$$

b. Elektrisirungsrichtung parallel der Y^0-Axe.

In § 2, *b* sahen wir, dass bei dielektrischer Polarisation parallel der Y^0-Axe eine Drehung der optischen Symmetrieaxen um die Y^0-Axe stattfindet, welche durch die Constante e_{41} bestimmt ist und deren Beobachtung daher zur Ermittelung dieser Constante dienen kann. Diese Drehung äussert sich in proportionalen Aenderungen des Gangunterschiedes in Richtungen, welche die Winkel zwischen Z^0 und X^0 (ungefähr) halbiren; aus jenen Aenderungen $\varDelta_4$, $\varDelta_5$ kann also e_{41} berechnet werden, und zwar nach den in § 2, *b* aufgestellten Formeln 59), 60), 61).

Zum Zwecke der Beobachtung dieser Grössen $\varDelta_4$, $\varDelta_5$ war aus demselben Krystall, der das Material zu den zuvor benutzten Platten geliefert hatte, eine Platte No. 3 hergestellt worden, deren Breitseiten bis auf eine zu vernachlässigende Abweichung von $1{,}4^0$ senkrecht zur Y^0-Axe, und deren Schmalseiten fast genau unter 45^0 gegen die Z^0- und X^0-Axe geneigt waren; die Abweichungen von letzterer Orientirung, welche durch Messung der Auslöschungsschiefe auf

den Breitseiten festgestellt wurden, waren ebenfalls so gering, dass sie keine Correction nöthig machten. Zur Unterscheidung der Flächen und Kantenrichtungen war auf derjenigen Breitseite, aus welcher die $-Y^0$-Axe austrat, ein Pfeil parallel denjenigen Kanten, deren Richtung den Winkel $(+X^0, +Z^0)$ halbirte, eingeritzt. Im Folgenden soll die letztere Richtung mit $+45^0$, die der anderen langen Kanten mit -45^0 bezeichnet werden, entsprechend den Werthen des Winkels ϑ in der Formel 59). Die Länge der ersteren Kanten betrug 20,6, die der letzteren 20,55, die Dicke der Platte 3,54 mm. — Die Versuchsanordnung war genau dieselbe, wie bei den Beobachtungen an der Platte No. 2, sowohl was die Compensation des ursprünglichen Gangunterschiedes und die Compensatoreinstellung, als was die Herstellung des elektrischen Feldes und Messung seiner Intensität betrifft. Das Potential wurde wieder bei allen Beobachtungen auf den Werth **13,13** gebracht, so dass $\frac{\partial V}{\partial n}$ oder $\frac{m}{\varkappa_1}$ dem absoluten Werthe nach immer gleich **37,1** war.

In der nachstehenden tabellarischen Zusammenstellung der Beobachtungsresultate ist vor den Zeilen wieder das Vorzeichen des jetzt mit b zu bezeichnenden Momentes, bei dem die betreffenden Compensatoreinstellungen erhalten wurden, angegeben; dasselbe ist positiv, wenn die mit dem Pfeil bezeichnete Fläche positiv geladen war. — An einer Stelle besass die Platte einen kleinen, der Kantenrichtung $+45^0$ parallel verlaufenden Sprung, in dessen Nähe bei Beobachtung in letzterer Richtung der Compensatorstreifen etwas gestört erschien und ein augenscheinlich zu kleiner Werth von $\varDelta$ beobachtet wurde; aus diesem Grunde fehlt die Beobachtung an der Stelle „7 mm vom rechten Rand" in der Beobachtungsreihe für $\vartheta = +45^0$. —

Beobachtungsrichtung $\vartheta = +45^0$.

Mitte.

—		0,43		0,42		0,415				0,43		0,45										
0	0,71		0,73		0,73		0,71 |	0,74		0,73		0,75	0,65		0,61		0,64		0,62		0,64	
+															0,93		0,94		0,97		0,96		
$\varDelta$		−0,29		−0,31		−0,305				−0,305		−0,29			+0,30		+0,315		+0,34		+0,33		**0,3105**

7 mm vom linken Rand.

—		0,46		0,48		0,47											
0	0,78		0,80		0,81		0,81	0,84		0,83		0,81		0,78		0,78	
+									1,14		1,15		1,08		1,10		
$\varDelta$		−0,33		−0,325		−0,34			+0,305		+0,33		+0,285		+0,32		**0,3215**

$3\frac{1}{2}$ mm vom linken Rand.

—		0,47		0,52		0,52		0,52									
0	0,81		0,81		0,83		0,84		0,86	0,02		0,03		0,03		0,02	
+											0,35		0,345		0,36		
$\varDelta$		−0,34		−0,30		−0,315		−0,33			+0,325		+0,315		+0,335		**0,323**

	3½ mm vom rechten Rand.														
—		0,60		0,60		0,60									
0	0,95		0,95		0,95		0,93	0,96		0,98		0,97		0,97	
+									1,31		1,28		1,29		
Δ		—0,35		—0,35		—0,34			+0,34		+0,305		+0,32		**0,3345.**

Gesammtmittel von $|\Delta|$: $\Delta_4 = \mathbf{0{,}3224}$.

Da hier Δ das gleiche Vorzeichen hat, wie das inducirte Moment, so hat $\bar{\Delta} = -\frac{\Delta}{23{,}8}$ das entgegengesetzte, d. h. $\frac{\bar{\Delta}}{m} = \frac{\bar{\Delta}}{b}$ ist negativ, und man erhält

$$\bar{\Delta}_4 = -\mathbf{0{,}01354},$$

$$\frac{\bar{\Delta}_4 \lambda}{L \cdot \frac{m}{\varkappa_1}} = -\frac{0{,}01354 \cdot 589{,}2}{20{,}6 \cdot 37{,}1} \cdot 10^{-6} = -\mathbf{1{,}043 \cdot 10^{-8}}.$$

Beobachtungsrichtung $\vartheta = -45^0$.

	3½ mm vom rechten Rand.																
—											1,13		1,13		1,14		
0	0,77		0,77		0,735		0,75		0,74	0,77		0,775		0,78		0,80	
+		0,43		0,40		0,41		0,42									
Δ		—0,34		—0,352		—0,332		— 0,325			+0,358		+0,352		+0,35		**0,345**

	7 mm vom rechten Rand.																	
—		0,65		0,67		0,68		0,69										
0	0,32		0,32		0,35		0,35		0,35		0,35		0,37		0,37		0,38	
+										0,02		0,05		0,05		0,05		
Δ		+0,33		+0,335		+0,33		+0,34		—0,33		—0,31		—0,32		—0,325		**0,3275**

	Mitte.																	
—		1,495		1,51		1,49		1,51										
0	1,155		1,155		1,17		1,16		1,18	1,15		1,15		1,16		1,16		1,17	
+											0,83		0,83		0,82		0,84		
Δ		+0,34		+0,347		+0,325		+0,34			—0,32		—0,325		—0,34		—0,325		**0,333**

	7 mm vom linken Rand.														
—									0,79		0,49		0,49		
0	0,44		0,45		0,43		0,43	0,44		0,44 | 0,14		0,17		0,15	
+		0,13		0,11		0,08									
Δ		—0,315		—0,33		—0,35			+0,35		+0,335		+0,33		**0,3355**

3½ mm vom linken Rand.

—		0,92		0,91		0,91								
0	0,57		0,59		0,58		0,58		0,58		0,55		0,54	
+								0,23		0,22		0,22		
$\varDelta$		+0,34		+0,325		+0,33		—0,35		—0,345		—0,325		**0,336.**

Gesammtmittel von $|\varDelta|$: $\varDelta_5 = \mathbf{0,3354}$.

Das Vorzeichen ist entgegengesetzt wie im vorigen Falle, somit $\bar{\varDelta}_5 = +\mathbf{0,01408}$,

$$\frac{\bar{\varDelta}_5 \lambda}{L \cdot \frac{m}{\varkappa_1}} = + \frac{0,01408 \cdot 589,2}{20,55 \cdot 37,1} \cdot 10^{-6} = +\mathbf{1,085 \cdot 10^{-8}}.$$

Nach den Formeln 60) und 61) müssen die Grössen $\frac{-\bar{\varDelta}_4 \lambda}{L \cdot \frac{m}{\varkappa_1}}$ und $\frac{+\bar{\varDelta}_5 \lambda}{L \cdot \frac{m}{\varkappa_1}}$ beide denselben Werth haben, nämlich gleich dem Ausdruck

$$\tfrac{1}{2} n_m'^3 \frac{e_{41} \varkappa_1}{v^2} + \tfrac{1}{4} (n_e^0 - n_o^0) \delta_{14}$$

sein. Die Werthe, welche wir für obige Grössen soeben gefunden haben: $+1,043 \cdot 10^{-8}$ und $+1,085 \cdot 10^{-8}$ stimmen in der That so gut überein, wie bei der geringen Grösse der gemessenen relativen Verzögerungen nur irgend erwartet werden kann. Nimmt man das Mittel aus beiden Werthen: $+1,064 \cdot 10^{-8}$, so erhält man zur Berechnung von $\frac{e_{41} \varkappa_1}{v^2}$ die Gleichung

$$\frac{e_{41} \varkappa_1}{v^2} \cdot n_m'^3 = +2,128 \cdot 10^{-8} - \tfrac{1}{2} \cdot 0,0091 \cdot 1,93 \cdot 10^{-8} = +2,12 \cdot 10^{-8},$$

worin $n_m' = \frac{3}{4} n_o^0 + \frac{1}{4} n_e^0 = 1,5465$ gesetzt werden kann. Daraus folgt

$$\frac{\boldsymbol{e_{41} \varkappa_1}}{\boldsymbol{v^2}} = +\mathbf{0,570 \cdot 10^{-8}}.$$

Die Werthe der elektrooptischen Constanten, zu welchen die Compensatorbeobachtungen an den drei verschiedenen Platten geführt haben, sind also folgende:

$$\frac{e_{11} \varkappa_1}{v^2} \begin{cases} = +1,370 \cdot 10^{-8} & \text{aus den Beobachtungen an Platte (1),} \\ = +1,448 \cdot 10^{-8} & \text{,, ,, ,, ,, ,, (2),} \end{cases}$$

$$\frac{e_{41} \varkappa_1}{v^2} \begin{cases} = +0,602 \cdot 10^{-8} & \text{,, ,, ,, ,, ,, (2),} \\ = +0,570 \cdot 10^{-8} & \text{,, ,, ,, ,, ,, (3).} \end{cases}$$

Danach werden wir (indem wir dem ersten Werth von $\frac{e_{11}\varkappa_1}{v^2}$ aus dem früher erwähnten Grunde etwas grösseres Gewicht beilegen, als dem an Platte (2) gefundenen) als definitive Werthe annehmen können:

$$\frac{e_{11}\varkappa_1}{v^2} = +1{,}40 \cdot 10^{-8},$$

$$\frac{e_{41}\varkappa_1}{v^2} = +0{,}586 \cdot 10^{-8}.$$

Die mit diesen Werthen nach den Formeln 51), 52), 53), 60) und 61) berechneten Werthe der Grössen $\varDelta' = \frac{\overline{\varDelta}\lambda}{L \cdot \frac{m}{\varkappa_1}} \cdot 10^{-8}$ sind nachstehend mit den beobachteten zusammengestellt.

	$\varDelta'_1$	$\varDelta'_2$	$\varDelta'_3$	$-\varDelta'_4$	$\varDelta'_5$
Berechnet	2,64	4,95	2,84	1,091	1,091
Beobachtet	2,58	5,11	2,94	1,043	1,085
Differenz in Procenten	+2,3	−3,1	−3,4	+4,4	+0,55

§ 4. **Piëzoelektrische Beobachtungen.**

Die piëzoelektrischen Constanten des Quarzes sind zwar bereits von den Herren E. Riecke und W. Voigt[1]) bestimmt worden, und der Werth der einen derselben (δ_{11}), welcher sich schon aus den Beobachtungen von P. Curie berechnen liess, stimmte nach diesen beiden Bestimmungen auch annähernd überein; aber es schien mir doch sicherer, beide Constanten an demselben Material, welches zur elektrooptischen Untersuchung gedient hatte, noch einmal zu bestimmen, da es immerhin wohl nicht ausgeschlossen ist, dass dieselben bei Quarzkrystallen verschiedenen Ursprunges etwas verschiedene Werthe haben können.

Die piëzoelektrische Untersuchung wurde im Wesentlichen ebenso ausgeführt, wie diejenige der Herren Riecke und Voigt am Quarz und Turmalin, also auch wie die in § 4 des II. Theiles beschriebene am Natriumchlorat. Ueber die Aufstellung der Platten etc. gilt alles a. a. O. (S. 70) Gesagte auch hier, da, wie bei der Dodekaëderplatte des Natriumchlorates, die Elektricitätsentwicklung auf einem zur Druckrichtung parallelen Flächenpaar der comprimirten rechtwinkligen Parallelepipeda zu messen war.

Etwas abweichend war nur die Bestimmung der abgelenkten Ruhelage der Nadel des Quadrantelektrometers aus den bei den ersten Schwingungen nach

1) E. Riecke und W. Voigt, Wied. Ann. **45**, 523—552. 1892.

der Belastung oder Entlastung des Krystallprismas beobachteten Umkehrpunkten, und zwar erstens deshalb, weil noch nicht die Einrichtung zum Belasten und Entlasten vom Sitze des Beobachters aus getroffen und es daher nicht möglich war, schon die beiden ersten Umkehrpunkte zu beobachten, zweitens aber deshalb, weil wegen der guten Isolation des Quarzes der Elektricitätsverlust und somit das Zurückgehen der Ruhelage während der Dauer der beobachteten Schwingungen als gleichförmig angesehen werden konnte. Wenn β die Dämpfungsconstante und ξ die constante Grösse ist, um welche die abgelenkte Ruhelage während der Dauer einer Schwingung zurückgeht, so sind dann die von dem Nullpunkt (d. h. der Ruhelage bei zur Erde abgeleiteten Quadranten) aus gerechneten Ausschläge, bei denen die Nadel umkehrt:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 + \varphi_0 \beta - \xi, \\ \varphi_2 &= \varphi_0 - \varphi_0 \beta^2 - 2\xi, \\ \varphi_3 &= \varphi_0 + \varphi_0 \beta^3 - 3\xi, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_h &= \varphi_0 - (-1)^h \beta^h - h\xi. \end{aligned}$$

Darin bezeichnet φ_0 die Ablenkung, bei welcher das Elektrometer sich ruhig einstellen würde, wenn gar keine Elektricitätszerstreuung stattfände, und welche also aus den Schwingungsbeobachtungen abgeleitet werden soll. Hat man nun, wie es bei den vorliegenden Beobachtungen der Fall war, den 3ten, 4ten, 6ten und 7ten Umkehrpunkt abgelesen, so berechne man zunächst die zwei Grössen

$$62) \qquad \varphi' = \frac{\varphi_3 \beta + \varphi_4}{1+\beta}, \qquad \varphi'' = \frac{\varphi_6 \beta + \varphi_7}{1+\beta}$$

mit Hülfe der durch besondere Beobachtungen der Schwingungen um den Nullpunkt gefundenen Dämpfungsconstante β. Nach den obigen Formeln für die φ_h ist nun

$$\varphi' = \varphi_0 - \xi \cdot \frac{4+3\beta}{1+\beta}, \qquad \varphi'' = \varphi_0 - \xi \cdot \frac{7+6\beta}{1+\beta},$$

folglich

$$\varphi' - \varphi'' = \frac{3+3\beta}{1+\beta} \cdot \xi = 3\xi.$$

Setzt man nun diesen Werth von ξ in den Ausdruck für φ' ein, so ergiebt sich

$$63) \qquad \varphi_0 = \varphi' + (\varphi' - \varphi'') \cdot \frac{4+3\beta}{3+3\beta}.$$

Bei den vorliegenden Beobachtungen war β durchschnittlich $= \frac{2}{3}$, so dass sich ergiebt:

$$63') \qquad \varphi_0 = \varphi' + (\varphi' - \varphi'') \cdot \tfrac{6}{5}.$$

Nach dieser Formel sind die in den Tabellen angegebenen Werthe φ_0 berechnet. Ausser diesen sind die nach 62) gebildeten Werthe φ' und φ'' angeführt, deren Differenz ein Maass für die Stärke des Elektricitätsverlustes ist, da $\varphi' - \varphi'' = 3\xi$ der Betrag ist, um welchen die Ablenkung der Nadel während der Dauer dreier Schwingungen, also vom Moment der Ladung bis zum dritten Umkehrpunkt, abgenommen hat. Der Nullpunkt des Elektrometers wurde vor und nach jedem Belastungs- oder Entlastungsversuch bestimmt, und etwaige Verschiebungen desselben, die aber höchstens in sehr geringem Betrage vorkamen, wurden bei der Berechnung der Ablenkungen φ durch Interpolation des augenblicklichen Nullpunktes berücksichtigt. —

Eins der Präparate, welche zur Untersuchung gelangten, war die schon bei den optischen Beobachtungen an den Platten (2) und (3) zur Compensation benutzte Platte (1'), deren längste, der Y^0-Axe parallele Kanten jetzt aber durch Abschneiden eines Stückes auf $L = 15$ mm verkürzt worden waren. Die Dicke D dieser Platte, parallel der X^0-Axe, betrug 3,51 mm, die Breite B (parallel Z^0) etwa 9 mm. Wurde dieselbe parallel den längsten Kanten einem Drucke $p = \frac{P}{BD}$ unterworfen, so waren die elastischen Druckcomponenten alle Null bis auf $Y_y = p$, folglich nach dem Ansatz 46) die erregten Momente:

64) $$a_{90^0} = +\delta_{11} p, \qquad b = 0.$$

Der Index 90^0 bei a soll andeuten, dass dieser Werth für eine den $\angle\, 90^0$ mit der Z^0-Axe bildende Druckrichtung gilt. Liefert somit diese Platte die Constante δ_{11} allein, so war mindestens eine Platte mit gegen die Y^0- und Z^0-Axe geneigten Kanten nothwendig, um δ_{14} zu bestimmen. Es wurden zu diesem Zwecke aus dem von Zwillingsbildungen freien Theile desselben grossen Krystalles, welcher das Material zu allen früheren Präparaten geliefert hatte, zwei Prismen gefertigt, die je ein Flächenpaar parallel der Y^0Z^0-Ebene besassen, auf welchem das Moment a gemessen werden konnte, während die anderen Flächen unter 45^0 gegen die Y^0- und Z^0-Axe geneigt waren. Bei dem einen dieser Prismen, welches als No. 4 bezeichnet werden möge, lagen die längsten Kanten von der Länge $L = 14{,}95$ mm parallel der Halbirungslinie des Winkels $(+Z^0, +Y^0)$, beim anderen, No. 5, wo sie die Länge 14,97 mm besassen, halbirte ihre Richtung den Winkel $(+Z^0, -Y^0)$. Diese Richtungen besass also auch der Druck bei der piëzoelektrischen Untersuchung; sie sollen als $+45^0$ im ersten Falle und -45^0 im zweiten Falle unterschieden werden, und entsprechend die in den beiden Fällen erregten Momente als a_{+45^0} und a_{-45^0}.

Nach den Formeln 46) wird für die Druckrichtung $+45^0$, bei der $Y_y = Z_z = Y_z = \frac{1}{2} p$ ist,

65) $$a_{+45^0} = \tfrac{1}{2} p\,(\delta_{11} - \delta_{14}), \qquad b = 0,$$

und für die Druckrichtung -45^0, bei der $Y_z = -\frac{1}{2} p$ wird,

66) $$a_{-45^0} = \frac{1}{2} p\,(\delta_{11} + \delta_{14}), \qquad b = 0.$$

Dabei ist $p = \frac{P}{BD}$, wenn P das zur Belastung benutzte Gewicht und B die Breite, D die Dicke (letztere $\parallel X^0$ gerechnet) der Platte bezeichnet, welche Dimensionen bei beiden Prismen 6,0 mm betrugen.

Ist das erregte Moment gleich a, so wird das Quadrantenpaar des Elektrometers, welches mit der einen zur X^0-Axe senkrechten, mit Stanniol belegten Prismenfläche verbunden ist, auf das Potential $\pm \frac{aBL}{C}$ geladen, falls C seine Capacität nebst derjenigen der betreffenden Stanniolbelegung und der Verbindungsdrähte bezeichnet; denn $\pm aBL$ ist die auf der belegten Prismenfläche entwickelte Elektricitätsmenge, wobei das obere Vorzeichen für diejenige Fläche gilt, aus welcher die $+X^0$-Axe austritt.

Jenes Potential ist aber proportional φ_0, und zwar $= \frac{\varphi_0}{\Phi} \cdot 0{,}478 \cdot 10^{-2}$, wenn Φ der der Potentialdifferenz eines Clarkelementes entsprechende Elektrometerausschlag ist, welcher vor und nach jeder längeren Versuchsreihe bestimmt wurde. Somit ist das für den Druck $p = 1$ in absolutem elektrostatischen Maasse berechnete Moment, falls P in Grammen gemessen ist:

67) $$\pm \frac{a}{p} = \frac{D}{LP} \cdot \frac{\varphi_0}{\Phi} \cdot \frac{0{,}478}{9{,}81}\, C \cdot 10^{-4}.$$

Am Schlusse jeder die Resultate einer Versuchsreihe enthaltenden Tabelle ist jedesmal die aus dem Mittelwerth $\overline{\varphi}_0$ der einzelnen bei Belastung und Entlastung beobachteten absoluten Werthe von φ_0 berechnete Grösse

$$\mu = \frac{D}{LP}\,\frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi},$$

welche ein relatives Maass für $\frac{a}{p}$ ist, mitgetheilt, und zwar mit demjenigen Vorzeichen, welches die durch Belastung hervorgebrachte elektrische Ladung der gerade mit dem Elektrometer verbundenen Fläche besass. Welches die Richtung der äusseren Normale dieser letzteren Fläche war, ist durch das über jeder Beobachtungsreihe stehende Zeichen $+X^0$ oder $-X^0$ angezeigt. Bezüglich der Vorzeichen von φ, die jedesmal aus den ersten beiden Columnen ersichtlich sind, ist zu bemerken, dass negative Ausschläge positiver Ladung entsprachen. Die Buchstaben E und B über den einzelnen Columnen bedeuten wie früher, ob die darunter stehenden Ausschläge bei Entlastung oder Belastung des Krystallprismas beobachtet wurden.

Prisma 4.

$-X^0$.

$P = 2344.\quad 2\Phi = 201{,}1.$

	B	*E*	*B*	*E*	*B*	*E*	*B*	*E*	*B*	*E*
φ'	−73,1	+74,4	73,6	74,8	73,8	76,8	74,0	74,1	72,7	75,4
φ''	−70,1	+72,1	70,6	74,1	72,4	76,1	72,7	74,0	71,8	74,7
φ_0	−76,7	+77,2	77,2	75,6	75,5	77,6	75,6	74,2	73,8	76,2

$$\overline{\varphi}_0 = 75{,}96.\qquad \frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}755.$$

$$\mu = +\mathbf{1{,}291 \cdot 10^{-4}}.$$

$+X_0$.

$P = 1000.\quad 2\Phi = 197{,}7.$

	B	*E*	*B*	*E*	*B*	*E*	*B*	*E*	*B*	*E*
φ'	+32,4	−30,5	32,5	31,7	32,5	30,7	32,3	30,5	32,3	30,7
φ''	+32,6	−30,6	32,5	31,7	32,6	30,7	32,4	30,2	32,0	30,6
φ_0	+32,5	−30,6	32,5	31,7	32,5	30,7	32,4	30,9	32,6	30,8

$$\overline{\varphi}_0 = 31{,}72.\qquad \frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}321.$$

$$\mu = -\mathbf{1{,}287 \cdot 10^{-4}}.$$

In der letzten Beobachtungsreihe ist bisweilen φ'' grösser als φ', so dass der Ausschlag nicht nur nicht ab-, sondern sogar noch zugenommen hat, allerdings nur äusserst wenig, und wohl nur scheinbar in Folge einer kleinen Unregelmässigkeit beim ersten Ausschlage. In solchen Fällen, die auch bei der Platte 5 noch einigemal vorkommen, ist für φ_0 einfach das arithmetische Mittel aus φ' und φ'' angenommen.

An dem Prisma 4 (sowie an 1′) wurden zum Zwecke der Bestimmung der Capacität ferner bei sonst unveränderter Anordnung Messungen ausgeführt, wobei mit dem Quadrantenpaar des Elektrometers noch ein Luftcondensator verbunden war, dessen Platten (kreisförmige Kupferscheiben von ca. 10 cm Radius) durch drei kleine Quarzplatten von 0,249 cm Dicke und je 0,75 cm² Querschnitt von einander getrennt waren. Die bei diesen Messungen gefundenen Werthe von μ sollen durch einen oberen Index ausgezeichnet werden.

$-X_0$.

$P = 2344.\quad 2\Phi = 201.$

	B	*E*	*B*	*E*	*B*	*E*	*B*	*E*
φ'	−28,6	+28,5	28,4	28,7	28,3	28,8	28,7	28,6
φ''	−28,1	+28,3	27,9	28,0	27,5	28,6	28,1	28,4
φ_0	−29,2	+28,7	29,0	29,5	29,2	29,0	29,4	28,9

$$\overline{\varphi}_0 = 29{,}13.\qquad \frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}2895.$$

$$\mu' = +\mathbf{0{,}495 \cdot 10^{-4}}.$$

$+X_0$.

$P = 2344. \quad 2\Phi = 198.$

	B	E	B	E	B	E	B	E
φ'	+29,0	—28,1	28,9	28,4	28,6	28,6	28,4	28,1
φ''	+28,4	—27,6	28,6	28,0	28,3	28,3	28,3	27,9
φ_0	+29,75	—28,7	29,2	28,8	29,0	29,0	28,5	28,3

$$\overline{\varphi}_0 = 28{,}91. \qquad \frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}292.$$

$$\mu' = -\mathbf{0{,}499 \cdot 10^{-4}}.$$

Das arithmetische Mittel aus den an beiden Flächen erhaltenen absoluten Werthen von μ bezw. μ' ist

$$|\mu|_{+45} = \mathbf{1{,}289 \cdot 10^{-4}}, \qquad |\mu'|_{+45} = \mathbf{0{,}497 \cdot 10^{-4}}.$$

Bei Berücksichtigung des Vorzeichens von $\frac{a}{p}$ folgt aus ersterem Werthe nach 67):

$$\frac{a_{+45^0}}{p} = -\mathbf{0{,}0629 \cdot 10^{-8}} \cdot C.$$

Prisma 5.

$+X^0$.

$P = 2344. \quad 2\Phi = 200{,}0.$

	B	E	B	E	B	E	B	E	B	E
φ'	+38,9	—42,5	38,3	41,5	41,4	40,2	41,0	39,7	40,5	41,5
φ''	+38,3	—41,1	37,5	40,9	40,7	40,0	40,3	39,5	40,1	41,3
φ_0	+39,6	—44,2	39,3	42,1	42,2	40,4	41,8	39,9	40,9	41,7

$$\overline{\varphi}_0 = 41{,}2. \qquad \frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}412.$$

$$\mu = -\mathbf{0{,}704 \cdot 10^{-4}}.$$

$-X^0$

$P = 2344. \quad 2\Phi = 200.$

	B	E	B	E	B	E	B	E	B	E
φ'	—38,1	+38,7	38,7	41,8	38,2	40,5	38,8	41,1	39,4	40,1
φ''	—38,0	+38,7	38,0	41,8	38,5	40,9	38,4	41,4	38,9	40,2
φ_0	—38,2	+38,7	39,5	41,8	38,35	40,7	39,3	41,25	40,0	40,15

$$\overline{\varphi}_0 = 39{,}80. \qquad \frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}398.$$

$$\mu = +\mathbf{0{,}680 \cdot 10^{-4}}.$$

Gesammtmittel: $|\mu|_{-45} = \mathbf{0{,}697 \cdot 10^{-4}}, \qquad \frac{a_{-45^0}}{p} = -\mathbf{0{,}0340 \cdot 10^{-8}\, C}.$

Prisma 1'.

$+X^0$.

	$P = 1000$		$P = 500.\ 2\Phi = 200{,}9.$							
	B	E	B	E	B	E	B	E	B	E
φ'	+80,6	−79,6	41,1	39,3	40,0	39,5	40,25	39,8	40,7	39,5
φ''	+80,9	−78,6	40,4	38,9	39,8	39,2	40,2	39,6	40,6	39,4
φ_0	+80,8	−80,8	41,9	39,8	40,2	39,8	40,3	40,0	40,8	39,6

$$\overline{\varphi}_0 = 40{,}32. \quad \frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}4015.$$

$$\mu = -\mathbf{1{,}875 \cdot 10^{-4}}.$$

$-X^0$.

$P = 500.\ 2\Phi = 200{,}9.$

	B	E	B	E	B	E	B	E	B	E
φ'	−38,8	+40,4	39,6	41,1	39,4	40,9	39,8	41,1	39,2	40,7
φ''	−39,1	+40,6	39,7	41,2	39,5	41,0	40,0	41,2	39,1	40,9
φ_0	−39,0	+40,5	39,7	41,2	39,5	41,0	39,9	41,2	39,1	40.8

$$\overline{\varphi}_0 = 40{,}19. \quad \frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}3985.$$

$$\mu = +\mathbf{1{,}869 \cdot 10^{-4}}.$$

Gesammtmittel: $|\mu|_{90^0} = \mathbf{1{,}872 \cdot 10^{-4}}$, $\quad \frac{a_{90^0}}{p} = -\mathbf{0{,}0913 \cdot 10^{-8}\, C}.$

Bei eingeschaltetem Luftcondensator, dessen Platten wieder durch 3 Quarzstückchen von 0,249 cm Dicke und je 0,75 cm² Querschnitt getrennt waren, fand sich:

$+X^0$.

$P = 1000.\ 2\Phi = 200{,}7.$

	B	E	B	E	B	E	B	E	B	E
φ'	+28,5	−27,9	29,0	28,9	29,3	29,2	30,0	29,6	29,9	29,7
φ''	+27,3	−26,7	27,8	27,6	28,3	28,2	29,0	28,8	29,0	28,9
φ_0	+29,9	−29,3	30,4	30,5	30,5	30,4	31,2	30,6	31,0	30,7

$$\overline{\varphi}_0 = 30{,}45. \quad \frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}3034.$$

$$\mu' = -\mathbf{0{,}7105 \cdot 10^{-4}}.$$

$-X^0$.

P und Φ wie zuvor.

	B	E	B	E	B	E	B	E	B	E
φ'	— 29,2	+ 29,7	29,7	29,9	29,3	30,1	29,8	30,4	29,8	30,3
φ''	— 28,8	+ 29,2	29,1	29,5	28,8	29,6	29,3	30,0	29,4	29,8
φ_0	— 29,7	+ 30,3	30,4	30,4	29,9	30,7	30,4	30,9	30,3	30,9

$$\bar{\varphi}_0 = 30{,}39. \quad \frac{\bar{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}3028.$$

$$\mu' = +\mathbf{0{,}7095 \cdot 10^{-4}}.$$

Gesammtmittel: $|\mu'|_{90} = \mathbf{0{,}710 \cdot 10^{-4}}$.

Ferner bei eingeschaltetem Luftcondensator, wenn zwischen dessen Platten 3 Quarzstückchen von 0,5 cm Höhe und je 0,375 cm² Querschnitt lagen:

$-X^0$.

$P = 1000. \quad 2\Phi = 200{,}8.$

	B	E	B	E	B	E	B	E
φ'	— 42,4	+ 42,0	41,8	42,3	41,9	42,2	41,6	42,6
φ''	— 42,1	+ 41,4	41,2	41,9	41,3	41,6	41,2	42,1
φ_0	— 42,7	+ 42,7	42,5	42,8	42,6	42,9	42,1	43,2

$$\bar{\varphi}_0 = 42{,}69. \quad \frac{\bar{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}4255.$$

$$\mu'' = +\mathbf{0{,}995 \cdot 10^{-4}}.$$

$+X^0$.

$P = 1000. \quad 2\Phi = 200{,}6.$

	B	E	B	E	B	E	B	E
φ'	+ 43,6	— 42,4	43,4	42,1	43,2	42,7	43,3	42,5
φ''	+ 42,9	— 41,8	42,75	41,5	42,5	42,1	42,6	41,8
φ_0	+ 44,5	— 43,15	44,2	42,8	44,1	43,45	44,2	43,4

$$\bar{\varphi}_0 = 43{,}73. \quad \frac{\bar{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}4355.$$

$$\mu'' = -\mathbf{1{,}018 \cdot 10^{-4}}.$$

Gesammtmittel: $|\mu''|_{90} = \mathbf{1{,}006 \cdot 10^{-4}}$.

Die Beobachtungen bei verschiedenem Plattenabstand des Luftcondensators waren erforderlich, um die unbekannte Capacität der Drähte und Klemmen, durch welche die Verbindung mit der isolirten Condensatorplatte hergestellt wurde, zu eliminiren, wie unten näher ausgeführt werden wird. Da aber die Quarzstückchen, welche bei den beiden vorhergehenden Versuchsreihen die Con-

densatorplatten trennten, durch ihre grosse Dielektricitätsconstante selbst eine nicht ganz unerhebliche Vermehrung der Capacität bewirkten, welche nur annähernd berechnet werden kann, so wurden noch zwei weitere Beobachtungsreihen an der Platte 1′ angestellt, wobei zwischen die Condensatorplatten drei Hartgummistückchen von viel kleinerem Querschnitt, wie die vorher benutzten Quarzstückchen, gelegt worden waren. Zunächst wurde zum Vergleich noch einmal ohne angeschlossenen Condensator beobachtet und dabei gefunden:

$$-X^0.$$

$$P = 500. \quad 2\Phi = 200{,}9.$$

	B	*E*	*B*	*E*	*B*	*E*	*B*	*E*	*B*	*E*
φ'	—36,9	+40,7	39,5	41,3	39,3	41,2	39,8	40,9	39,1	41,9
φ''	—35,3	+40,4	39,1	41,0	39,1	41,0	39,5	40,7	38,9	41,8
φ_0	—38,8	+41,1	40,0	41,65	39,5	41,4	40,1	41,1	39,3	42,0

$$\overline{\varphi}_0 = 40{,}52. \quad \frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}403.$$

$$\mu = +\mathbf{1{,}880 \cdot 10^{-4}}.$$

$$+X^0.$$

$$P = 500. \quad 2\Phi = 200{,}4.$$

	B	*E*	*B*	*E*	*B*	*E*	*B*	*E*	*B*	*E*
φ'	+40,7	—39,4	40,4	39,4	40,4	39,6	40,7	39,5	40,6	39,4
φ''	+40,9	—39,6	40,7	39,6	40,7	39,9	41,1	39,6	40,9	39,5
φ_0	+40,8	—39,5	40,6	39,5	40,6	39,8	40,9	39,6	40,8	39,5

$$\overline{\varphi}_0 = 40{,}16. \quad \frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}401.$$

$$\mu = +\mathbf{1{,}875 \cdot 10^{-4}}.$$

Gesammtmittel: $|\mu| = \mathbf{1{,}878 \cdot 10^{-4}}$

und zusammen mit dem Resultat der früheren Beobachtungen

$$|\mu|_{90} = \mathbf{1{,}875 \cdot 10^{-4}},$$

$$\frac{a_{90^0}}{p} = \mathbf{0{,}09145 \cdot C \cdot 10^{-8}}.$$

Bei angeschlossenem Luftcondensator mit zwischengelegten Hartgummistückchen von 0,477 cm Dicke und zusammen 0,31 cm² Querschnitt ergab sich:

$$+X^0.$$

$$P = 1000\,\mathrm{g}. \quad 2\Phi = 200{,}4.$$

	B	*E*	*B*	*E*	*B*	*E*	*B*	*E*	*B*	*E*	*B*	*E*
φ'	+41,2	—43,0	42,1	42,0	42,4	42,0	43,1	42,1	42,8	41,7	42,5	42,05
φ''	+40,7	—42,8	41,8	41,8	42,2	42,0	42,8	42,1	42,5	41,7	42,5	42,0
φ_0	+41,8	—43,2	42,4	42,2	42,6	42,0	43,5	42,1	43,2	41,7	42,5	42,1

$$\overline{\varphi}_0 = 42{,}44. \qquad \frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}4235.$$

$$|\mu'''|_{90} = \mathbf{0{,}991 \cdot 10^{-4}}.$$

Desgleichen, aber mit Hartgummistücken von 0,257 cm Dicke und zusammen 0,3 cm² Querschnitt:

$+ X^0$.

P und 2Φ wie oben.

	B	E	B	E	B	E	B	E	B	E	B	E
φ'	+ 31,5	— 31,5	31,6	31,7	32,0	31,5	31,85	31,8	32,05	31,15	32,0	31,3
φ''	+ 31,5	— 31,4	31,6	31,6	31,9	31,4	31,7	31,8	32,1	31,15	31,9	31,2
φ_0	+ 31,5	— 31,6	31,6	31,8	32,1	31,6	32,05	31,8	32,1	31,15	32,1	31,4

$$\overline{\varphi}_0 = 31{,}73. \qquad \frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}3167.$$

$$|\mu''''|_{90} = \mathbf{0{,}741 \cdot 10^{-4}}.$$

Berechnung der Capacität C.

Durch Vergleichung der Werthe μ, welche an derselben Quarzplatte einerseits ohne angeschlossenen Condensator, andererseits mit Condensator bei verschiedenem Plattenabstand des letzteren beobachtet sind, lässt sich die Capacität C der Elektrometerquadranten nebst den Verbindungsdrähten und der belegten Quarzplatte ermitteln, da man diejenige des Luftcondensators theoretisch in absolutem Maasse berechnen kann. — Es möge bezeichnen

C_0 die Capacität der Elektrometerquadranten nebst den sie mit der belegten Fläche des Krystallprismas verbindenden Drähten,

C'_{+45}, C'_{-45}, C'_{90} die Capacitäten der belegten Flächen der drei untersuchten Quarzprismen,

C_{+45} die Summe $C_0 + C'_{+45}$, (analog $C_{-45} = C_0 + C'_{-45}$, $C_{90} = C_0 + C'_{90}$),

c die unten berechnete Capacität des Luftcondensators, je nach den zwischengelegten Isolatorstückchen ebenso durch obere Indices unterschieden, wie die Grössen μ', μ'', μ''', μ'''',

c_0 die unbekannte Capacität der Drähte etc., welche die Zuleitung zum Condensator bilden.

Dann besteht die Proportion

$$\mu : \mu' = c' + c_0 + C_0 + C' : C_0 + C',$$

ebenso

$$\mu : \mu'' = c'' + c_0 + C_0 + C' : C_0 + C' \text{ und 2 analoge.}$$

Dabei ist es einerlei, für welches Quarzprisma die Grössen μ gelten, sofern sie sich nur beide auf ein und dasselbe beziehen; deshalb ist der untere Index (+ 45 etc.) fortgelassen, ebenso bei den C', die allerdings nicht genau gleich, aber

überhaupt relativ klein sind. Es müsste sich also für $\mu : \mu'$ aus den Beobachtungen an Platte 1' derselbe Werth ergeben, wie aus denen an Platte 4. Diese Werthe waren

$$|\mu|_{+45} : |\mu'|_{+45} = 1{,}289 : 0{,}497 = 2{,}590,$$
$$|\mu|_{90} : |\mu'|_{90} = 1{,}875 : 0{,}710 = 2{,}642.$$

Im Mittel können wir also $\mu : \mu' = \mathbf{2{,}62}$ annehmen.

Die anderen Verhältnisse sind nur an der Platte 1') bestimmt worden, und zwar

$$\mu : \mu'' = 1{,}875 : 1{,}006 = \mathbf{1{,}864}$$
$$\mu : \mu''' = 1{,}875 : 0{,}991 = \mathbf{1{,}892}$$
$$\mu : \mu'''' = 1{,}875 : 0{,}741 = \mathbf{2{,}53}.$$

Man erhält somit folgende 4 Gleichungen:

$$\text{68)} \quad \left| \begin{aligned} c_0 + c' &= 1{,}62 \ (C_0 + C'_{90}) \\ c_0 + c'' &= 0{,}864 \,(C_0 + C'_{90}) \\ c_0 + c''' &= 0{,}892 \,(C_0 + C'_{90}) \\ c_0 + c'''' &= 1{,}53 \ (C_0 + C'_{90}). \end{aligned} \right.$$

Es handelt sich nun darum, die hierin vorkommenden Grössen c', c'', c''', c'''' zu berechnen. Hierzu dient folgende, von Kirchhoff[1]) abgeleitete Formel für die Capacität eines Luftcondensators, der aus zwei parallelen kreisförmigen Platten vom Radius R, der Dicke b und dem gegenseitigen Abstand $2a$ besteht:

$$\text{69)} \qquad c = \frac{R^2}{8a} + \frac{R}{4\pi} \left\{ 1 + \log \frac{4\pi R (2a + b)}{a^2} + \frac{b}{2a} \log \frac{2a + b}{b} \right\}.$$

Bei dem hier benutzten Condensator war jedoch $2a$ nicht genau bekannt, weil seine Kupferplatten mit einer dünnen Firnissschicht überzogen waren; ist die Dicke der letzteren oder vielmehr einer äquivalenten Luftschicht $\frac{1}{2}\delta$ und die gemessene Dicke der zwischengelegten Quarz- oder Hartgummistückchen d (bezw. d', d'', d''', d'''' in den verschiedenen Fällen), so wird $2a = d + \delta$. Setzt man dies ein und entwickelt nach δ, indem man das Quadrat des sehr kleinen Bruches $\frac{\delta}{d}$ vernachlässigt, so wird

$$\text{69')} \quad c = \frac{R^2}{4d} + \frac{R}{4\pi} \left\{ 1 + \log \frac{16\pi R (d + b)}{d^2} + \frac{b}{d} \log \frac{b + d}{b} \right\} - \delta \left\{ \frac{R^2}{4\pi d} + \frac{R^2}{4d^2} + \frac{Rb}{4\pi d^2} \log \frac{b + d}{b} \right\}.$$

Endlich ist noch die Vermehrung der Capacität durch die Isolatorstückchen, welche die Kupferplatten auseinander hielten, zu berücksichtigen. Dieselbe besteht, wenigstens annähernd, darin, dass diejenigen Stücke f der Condensator-

1) G. Kirchhoff, Monatsber. d. Berl. Akademie 1877, 155; Gesammelte Abhandlungen (Leipzig 1882), 101—112.

platten, welche den Isolatorstückchen von der Dielektricitätsconstante K anliegen, K-mal so viel Elektricität aufnehmen, als wenn sie nur durch Luft getrennt wären. Demnach ist die fragliche Capacitätsvermehrung sehr annähernd gleich $\frac{f(K-1)}{4\pi d}$, wo für f der Querschnitt der trennenden Isolatorstückchen zusammengenommen zu setzen ist, und die Grössen c sind zu berechnen aus der Formel

69'') $$c = \frac{1}{4d}\left\{R^2 + \frac{K-1}{\pi}f\right\} + \frac{R}{4\pi}\left\{1 + \log\frac{16\pi R(d+b)}{d^2} + \frac{b}{d}\log\frac{d+b}{b}\right\} - \delta\left\{\frac{R^2}{4d^2} + \frac{R}{4\pi d} + \frac{R}{4\pi d}\cdot\frac{b}{d}\log\frac{d+b}{b}\right\}.$$

Bei dem benutzten Condensator war $R = 9{,}88$ cm, $b = 0{,}31$ cm, ferner in den einzelnen Fällen (nach der Reihenfolge der oberen Indices geordnet)

$d =$	0,249	0,50	0,477	0,257 cm
$f =$	2,25	1,125	0,31	0,30 cm²
$K =$	4,6	4,6	2,5	2,5.

Man findet hiermit aus 69'')

$$c' = 108{,}6 - 397\,\delta, \quad c'' = 56{,}8 - 100\,\delta, \quad c''' = 58{,}3 - 110\,\delta, \quad c'''' = 102{,}7 - 373\,\delta.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen 68) ein, so enthalten dieselben noch die 3 Unbekannten c_0, δ und $C_0 + C'$. Durch Elimination der letzteren aus der ersten und zweiten Gleichung einerseits, aus der dritten und vierten andererseits ergeben sich folgende zwei Gleichungen für c_0 und δ:

$$0{,}87\,c_0 + 209\,\delta = 2{,}4 \text{ und } 0{,}715\,c_0 + 184{,}4\,\delta = 2{,}7.$$

Dieselben sind nun zwar in Folge der Art, wie ihre Coefficienten aus denen der ursprünglichen Gleichungen gebildet sind, zu einer wirklichen Berechnung von c_0 und δ nicht geeignet, und dasselbe gilt von den Relationen für c_0 und δ, die man durch anderweitige Combination der Gleichungen 68) bilden könnte. Sie zeigen aber, dass jene beiden Grössen nur relativ kleine Beträge haben können, und zwar wird ihnen annähernd genügt durch die auch nach anderweitiger Abschätzung wahrscheinlichen Werthe

$$c_0 = 2{,}5, \qquad \delta = 0{,}005.$$

Unter dieser Annahme wird

$$c' = 106{,}6 \qquad c'' = 56{,}2 \qquad c''' = 57{,}75 \qquad c'''' = 100{,}84,$$

und die 4 Gleichungen 68) ergeben, für $C_0 + C'_{90}$ aufgelöst, der Reihe nach

$$C_0 + C'_{90} = 67{,}5, \quad 67{,}9, \quad 67{,}5, \quad 67{,}5,$$

also gut übereinstimmende Werthe, als deren Durchschnitt angenommen werden kann

$$C_0 + C'_{90} = \mathbf{67{,}6}.$$

Die Capacität C'_{90} ist diejenige eines Condensators, dessen Platten (nämlich die Stanniolbelegungen der Quarzplatte 1') die Oberfläche 1,35 cm² und den Abstand 0,35 cm haben und für dessen Dielektricum (Quarz) $K = 4{,}6$ ist, woraus sich ergiebt

$$C'_{90} = \mathbf{1{,}45},$$

und somit

$$\boldsymbol{C_0} = \mathbf{66{,}15}.$$

Für die Quarzprismen 4) und 5) findet man durch eine analoge Berechnung, wie sie eben für das Prisma 1') angestellt wurde,

$$C'_{+45} = C'_{-45} = \mathbf{0{,}55}.$$

Demnach hat die Gesammtcapacität folgende Werthe:

$C = \mathbf{66{,}7}$ bei den Beobachtungen an den Prismen 4 und 5,
$C = \mathbf{67{,}6}$ „ „ „ an der Platte 1'.

Setzt man dieselben in die Resultate, welche wir für $\mathfrak{a}_{45}$, $\mathfrak{a}_{-45}$ und $\mathfrak{a}_{90}$ gefunden hatten, ein, so werden diese:

$$\frac{\mathfrak{a}_{+45}}{p} = -4{,}19 \cdot 10^{-8},$$

$$\frac{\mathfrak{a}_{-45}}{p} = -2{,}265 \cdot 10^{-8},$$

$$\frac{\mathfrak{a}_{90}}{p} = -6{,}18 \cdot 10^{-8}.$$

Nach den Formeln 64), 65), 66) ist nun

$$\frac{\mathfrak{a}_{90}}{p} = +\delta_{11}, \qquad \frac{\mathfrak{a}_{+45}}{p} = \tfrac{1}{2}(\delta_{11} - \delta_{14}), \qquad \frac{\mathfrak{a}_{-45}}{p} = \tfrac{1}{2}(\delta_{11} + \delta_{14});$$

somit erhält man

$$\delta_{11} = \tfrac{1}{3}\left(\frac{\mathfrak{a}_{+45}}{p} + \frac{\mathfrak{a}_{-45}}{p}\right) + \tfrac{2}{3}\frac{\mathfrak{a}_{90}}{p}, \qquad \delta_{14} = \frac{\mathfrak{a}_{-45}}{p} - \frac{\mathfrak{a}_{+45}}{p},$$

und nach Einsetzen der obigen Zahlen folgende definitive Werthe der piëzoelektrischen Moduln des Quarzes in absolutem Maass:

$$\boldsymbol{\delta_{11}} = \mathbf{-6{,}27 \cdot 10^{-8}}, \qquad \boldsymbol{\delta_{14}} = \mathbf{+1{,}925 \cdot 10^{-8}}.$$

Die hieraus rückwärts berechneten Werthe der Grössen $\frac{\mathfrak{a}}{p}$ sind:

$$\frac{\mathfrak{a}_{+45}}{p} = -4{,}10 \cdot 10^{-8}, \qquad \frac{\mathfrak{a}_{-45}}{p} = -2{,}173 \cdot 10^{-8}, \qquad \frac{\mathfrak{a}_{90}}{p} = -6{,}27 \cdot 10^{-8},$$

unterscheiden sich also von den aus den Beobachtungen abgeleiteten, welche wir der Berechnung zu Grunde legten, nur um wenige Procente.

Der Werth von δ_{11} stimmt dem absoluten Betrage nach mit dem von Curie gefundenen ($6{,}32 \cdot 10^{-8}$) und auch annähernd mit demjenigen der Herren Riecke und Voigt ($6{,}45 \cdot 10^{-8}$) überein, der absolute Werth von δ_{14} ist jedoch erheblich grösser, als derjenige ($1{,}45 \cdot 10^{-8}$), zu welchem letztere beiden Beobachter gelangt sind. Ferner sind nach den Bestimmungen der letzteren die Vorzeichen der beiden Constanten entgegengesetzt, wie die von mir gefundenen, was seinen Grund aber lediglich darin haben dürfte, dass bei der Untersuchung der Herren Riecke und Voigt, bei der es nicht auf die Vorzeichen ankam, die positive Richtung der X^0-Axe nicht bezeichnet worden war. Das oben festgestellte negative Vorzeichen von δ_{11} zeigt, dass das positive Ende der X^0-Axe durch einen parallel der letzteren ausgeübten Druck positiv elektrisch wurde. Bei einem linken Krystall ist nun zufolge unserer Festlegung des Coordinatensystems die positive Seite der X^0-Axe dasjenige Ende einer zweizähligen Symmetrieaxe, an welchem die Rhombenfläche S nicht auftritt. (Vergl. Fig. 12, welche die Projection eines linken Krystalles auf die Basis, von $+Z^0$ her gesehen, darstellt). Dieses letztere soll nun nach den Beobachtungen von J. und P. Curie sowohl bei linken, als bei rechten Krystallen durch Druck positiv elektrisch werden. Somit steht die obige Vorzeichenbestimmung im Einklang mit der Angabe von J. und P. Curie. —

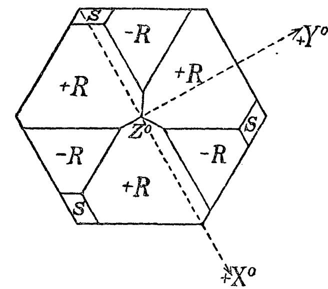


Fig. 12.

§ 5. **Piëzooptische Beobachtungen.**

In den Ausdrücken 48), welche im § 1 für diejenigen Constanten e'_{11}, e'_{41} abgeleitet wurden, welche die Aenderung der Doppelbrechung durch die im elektrischen Felde stattfindende Deformation bestimmen, kommen ausser den piëzoelektrischen Moduln noch die piëzooptischen Constanten $a_{11} - a_{12}$, a_{14}, a_{41} und a_{44} vor; diese müssen also noch bekannt sein, damit man die e'_{hk} berechnen und mit den beobachteten e_{hk} vergleichen kann. Nun sind zwar die sämmtlichen Constanten a_{hk} für Quarz bereits früher bestimmt worden[1]); allein da bisher noch keine Erfahrungen darüber vorlagen, wie grossen Schwankungen dieselben bei Quarzkrystallen verschiedenen Ursprungs etwa unterworfen sind, so schien es mir sicherer, an dem zur vorhergehenden Untersuchung benutzten Material eine Neubestimmung der vier hier in Betracht kommenden Constanten vorzunehmen. Es genügten hierzu Beobachtungen der durch einseitigen Druck erzeugten relativen Verzögerungen an denselben Prismen 1'), 4) und 5), welche zur piëzoelektrischen Untersuchung dienten. Die Combinationen der Constanten a_{hk}, welche

1) F. Pockels, Wied. Ann. **37**, 269—305. 1889.

man auf diese Weise finden kann, sind nämlich folgende. Wird das Prisma 1′) parallel seinen längsten Kanten, also parallel der Y^0-Axe, dem Drucke p unterworfen, so ist (wie aus dem Ansatz 45) S. 84 folgt):

70) $$\frac{\omega_x^2-\omega_y^2}{pv^2} = C_1 = \frac{a_{11}-a_{12}}{v^2}(s_{11}-s_{12}) + 2\frac{a_{14}}{v^2}s_{14},$$

und diese Grösse kann man ermitteln, indem man die Aenderungen der im convergenten Licht auf den zu Z^0 (d. i. zu den mittellangen Kanten) senkrechten Schmalseiten der Platte sichtbaren Interferenzringe misst und daraus zunächst nach den Formeln 54) und 54′) die Grösse $x = \frac{\omega_x^2-\omega_y^2}{\omega_r^{0^2}-\omega_l^{0^2}}$ berechnet. Diese Beobachtungen wurden in der Weise ausgeführt, dass die unter dem schon bei den piëzooptischen Beobachtungen am Natriumchlorat erwähnten Hebel aufgestellte Platte zwischen die Linsensysteme eines horizontal gelegten Polarisationsapparates gebracht, und die Zunahme der vertikalen scheinbaren Ringdurchmesser bei Belastung des Hebels an einem Glasmaassstab, der sich im Ocular des Polarisationsapparates befand, abgelesen wurde.

An den Prismen 4) und 5) wurden bei Compression derselben parallel ihren langen Kanten die Gangunterschiedsänderungen in den Richtungen senkrecht zu den langen Seitenflächen mit dem Compensator in der gewöhnlichen Weise gemessen. Die aus den so beobachteten $\frac{\bar{\varDelta}}{p}$ nach der Formel 11), worin das von der Dickenzunahme herrührende Glied in jedem Falle nach den Formeln der Elasticitätstheorie leicht bestimmt werden kann, zu berechnende Grösse $\frac{1}{p}\left(\frac{\omega_2^2-\omega_2^{0^2}}{v^2}n_2^{0^3}-\frac{\omega_1^2-\omega_1^{0^2}}{v^2}n_1^{0^3}\right)$ liefert dann folgende Combinationen der Constanten $\frac{a_{hk}}{v^2}$:

Prisma 4, Beobachtungsrichtung die X^0-Axe:

71) $$\tfrac{1}{2}(C_2+C_4)n_o^{0^3}-\tfrac{1}{2}(C_3+C_5)n_e^{0^3}-\frac{n_o^{0^3}}{2}\left\{\frac{a_{11}-a_{12}}{v^2}s_{14}+\frac{a_{14}}{v^2}s_{44}\right\};$$

Prisma 5, Beobachtungsrichtung die X^0-Axe:

72) $$\tfrac{1}{2}(C_2+C_4)n_o^{0^3}-\tfrac{1}{2}(C_3+C_5)n_e^{0^3}+\frac{n_o^{0^3}}{2}\left\{\frac{a_{11}-a_{12}}{v^2}s_{14}+\frac{a_{14}}{v^2}s_{44}\right\};$$

Prisma 4, Beobachtungsrichtung die Halbirungslinie des Winkels $(-Y^0, +Z^0)$:

73) $$\left|\begin{aligned}&\tfrac{1}{4}(C_2+C_4)(2n_o^{0^3}-n_m^3)-\tfrac{1}{4}(C_3+C_5)n_m^3-\tfrac{1}{2}C_1n_o^{0^3}+\frac{2n_o^{0^3}+n_m^3}{4}\left\{\frac{a_{11}-a_{12}}{v^2}s_{14}+\frac{a_{14}}{v^2}s_{44}\right\}\\&\quad+\tfrac{1}{2}n_m^3\left\{\frac{a_{41}}{v^2}(s_{11}-s_{12})+\frac{a_{44}}{v^2}s_{14}\right\}-\tfrac{1}{2}n_m^3\left\{2\frac{a_{41}}{v^2}s_{14}+\frac{a_{44}}{v^2}s_{44}\right\};\end{aligned}\right.$$

Prisma 5, Beobachtungsrichtung die Halbirungslinie des Winkels $(+Y^0, +Z^0)$:

$$74)\quad \begin{aligned} &\tfrac{1}{4}(C_2+C_4)(2n_o^{0^3}-n_m^3)-\tfrac{1}{4}(C_3+C_5)n_m^3-\tfrac{1}{2}C_1 n_o^{0^3}-\frac{2n_o^{0^3}+n_m^3}{4}\left\{\frac{a_{11}-a_{12}}{v^2}s_{14}+\frac{a_{14}}{v^2}s_{44}\right\} \\ &-\tfrac{1}{2}n_m^3\left\{\frac{a_{41}}{v^2}(s_{11}-s_{12})+\frac{a_{44}}{v^2}s_{14}\right\}-\tfrac{1}{2}n_m^3\left\{2\frac{a_{41}}{v^2}s_{14}+\frac{a_{44}}{v^2}s_{44}\right\}. \end{aligned}$$

Darin sind C_2, C_3, C_4, C_5 gewisse, in der oben citirten Abhandlung angegebene Aggregate der $\frac{a_{hk}}{v^2}$ und s_{hk}, welche man im vorliegenden Falle nicht zu kennen braucht, weil sie aus den vorstehenden Ausdrücken eliminirt werden können; denn es ist sehr annähernd $(2n_o^{0^3}-n_m^3):n_m^3 = n_o^{0^3}:n_e^{0^3}$, da n_m den Mittelwerth aus n_o^0 und n_e^0 bedeutet, und es kommen daher jene Constanten C_h in allen vier Ausdrücken 71) bis 74) nur in einer und derselben Verbindung

$$(C_2+C_4)n_o^{0^3}-(C_3+C_5)n_e^{0^3}$$

vor. Man kann demnach aus den durch die Compensatormessungen gefundenen Werthen der Ausdrücke 70) bis 74) folgende Constantencombinationen berechnen:

$$75)\quad \begin{aligned} \frac{a_{11}-a_{12}}{v^2}(s_{11}-s_{12})+2\frac{a_{14}}{v^2}s_{14} &= c_1, \\ \frac{a_{11}-a_{12}}{v^2}s_{14}+\frac{a_{14}}{v^2}s_{44} &= c_2, \\ \frac{a_{41}}{v^2}(s_{11}-s_{12})+\frac{a_{44}}{v^2}s_{14} &= c_3, \\ 2\frac{a_{41}}{v^2}s_{14}+\frac{a_{44}}{v^2}s_{44} &= c_4, \end{aligned}$$

und hieraus, nach Einsetzung der durch die Untersuchung von Herrn W. Voigt bekannten Werthe der Elasticitätsmoduln:

$$s_{11} = 12{,}73\cdot10^{-8},\quad s_{12} = -1{,}63\cdot10^{-8},\quad s_{14} = -4{,}23\cdot10^{-8},\quad s_{44} = 19{,}67\cdot10^{-8},$$

schliesslich die Constanten $\frac{a_{11}-a_{12}}{v^2}$, $\frac{a_{14}}{v^2}$, $\frac{a_{41}}{v^2}$, $\frac{a_{44}}{v^2}$ selbst.

Ueber die Ausführung der Compensatorbeobachtungen an den Prismen 4) und 5) sei nur noch Folgendes bemerkt. Die Orientirung der Compensatorhauptschnitte parallel den Schwingungsrichtungen im Krystall und der Nicolhauptschnitte unter den Winkeln $\pm 45^0$ dagegen wurde in derselben Weise bewerkstelligt, wie es bei den elektrooptischen Beobachtungen am Quarz beschrieben ist. Bei Beobachtung in den unter 45^0 gegen die Hauptaxe geneigten Richtungen musste die starke Aenderung des Gangunterschiedes, welche durch eine bei der Compression etwa eintretende kleine Neigung des Prismas nach vorn oder hinten

verursacht wurde, compensirt werden. Dies geschah dadurch, dass mit dem zu comprimirenden Prisma das andere in derjenigen Stellung, bei welcher seine optische Axe zu der des ersten gekreuzt und die X^0-Axe in beiden parallel lag, vermittelst zweier durch Gummiringe zusammengehaltener Glasstreifen verbunden wurde, so dass es, vor dem ersten Prisma stehend, wohl an dessen etwaiger Neigung, nicht aber an dessen Compression theilnahm. Da bei dieser Anordnung der gesammte Gangunterschied sehr gross war, so wurde derselbe durch ein drittes Quarzprisma mit horizontal und quer zur Beobachtungsrichtung liegender Hauptaxe zum grössten Theil compensirt, damit der Compensatorstreifen (hier immer im Natriumlicht) wieder hinreichend scharf erschien. — Die Messungen wurden immer an mehreren Stellen der Prismen (nahe der linken Seite, in der Mitte und nahe der rechten Seite) ausgeführt, um die Ungleichförmigkeit des Druckes möglichst zu verringern. Zur Belastung des Hebelendes diente ein Gewicht von 5002 g. —

Es erscheint überflüssig, die Beobachtungsresultate hier ausführlich wiederzugeben, da es sich nur um eine Wiederholung der früheren Bestimmungen handelt, und die Anordnung der Beobachtungsreihen ganz analog war wie bei letzteren.

Die Gesammtresultate für die durch den Druck $p = 1$ g auf der Weglänge 1 mm hervorgebrachten Gangunterschiede $\bar{\Delta}$, in Theilen der Wellenlänge des Na-Lichtes ausgedrückt, sind folgende:

Prisma 4, Beobachtungsrichtung parallel X^0: $\bar{\Delta} = -0{,}0122 \cdot 10^{-4}$,

Prisma 5, „ „ „ „ : $\bar{\Delta} = +0{,}0393 \cdot 10^{-4}$,

Prisma 4, Beobachtungsrichtung Halbirende des $\angle(-Y^0, Z^0)$: $\bar{\Delta} = +0{,}306 \cdot 10^{-4}$,

Prisma 5, „ „ „ „ $\angle(+Y^0, Z^0)$: $\bar{\Delta} = +0{,}445 \cdot 10^{-4}$.

In den beiden letzten Fällen bedeutet das positive Vorzeichen eine Verzögerung der parallel zur Druckrichtung polarisirten Welle gegen die senkrecht dazu polarisirte, in den beiden ersten Fällen eine relative Verzögerung der parallel Y^0 polarisirten Welle gegen die parallel Z^0 polarisirte.

Für die Ausdrücke 71) bis 74) folgen hieraus der Reihe nach die Werthe:

$$-0{,}1545 \cdot 10^{-8}, \qquad +0{,}530 \cdot 10^{-8}, \qquad +3{,}60 \cdot 10^{-8}, \qquad +5{,}25 \cdot 10^{-8}.$$

Dazu kommt noch der aus der Aenderung der Ringdurchmesser abgeleitete und daher weniger sichere Werth

$$C_1 = -1{,}39 \cdot 10^{-8}.$$

Man erhält daraus zunächst folgende Werthe der unter 75) angegebenen Constantencombinationen:

$$c_1 = -1{,}39 \cdot 10^{-8}, \quad c_2 = -0{,}185 \cdot 10^{-8}, \quad c_3 = -0{,}351 \cdot 10^{-8}, \quad c_4 = -0{,}944 \cdot 10^{-8},$$

und hieraus schliesslich die nachstehenden Resultate für die gesuchten piëzooptischen Constanten selbst:

$$\frac{a_{11}-a_{12}}{v^2} = -\mathbf{0{,}117}, \quad \frac{a_{14}}{v^2} = -\mathbf{0{,}035}, \quad \frac{a_{41}}{v^2} = -\mathbf{0{,}044}, \quad \frac{a_{44}}{v^2} = -\mathbf{0{,}067}.$$

Die frühere Untersuchung (vergl. a. a. O. p. 300) hatte ergeben:

$$\frac{a_{11}-a_{12}}{v^2} = -0{,}112, \quad \frac{a_{14}}{v^2} = -0{,}029, \quad \frac{a_{41}}{v^2} = -0{,}042, \quad \frac{a_{44}}{v^2} = -0{,}0685.$$

Die Abweichungen dürften wohl grösstentheils nur von den bei diesen Bestimmungen relativ grossen Beobachtungsfehlern herrühren, welche namentlich auf die kleinen Grössen $\frac{a_{41}}{v^2}$ und $\frac{a_{14}}{v^2}$ starken Einfluss haben können. —

§ 6. **Schlussfolgerungen aus den erhaltenen Resultaten.**

Setzt man die im letzten Paragraphen gefundenen Werthe der piëzooptischen Constanten und die in § 4 erhaltenen der piëzoelektrischen Moduln: $\delta_{11} = -6{,}27 \cdot 10^{-8}$, $\delta_{14} = +1{,}925 \cdot 10^{-8}$ in die Relationen 48), S. 85, ein, so erhält man folgende Werthe der Constanten $\frac{e'_{11}\varkappa_1}{v^2}$ und $\frac{e'_{41}\varkappa_1}{v^2}$, welche gemäss den Formeln 44) die optische Wirkung der im elektrischen Felde stattfindenden Deformation, berechnet wie die Wirkung einer gleichen mechanisch hervorgebrachten Deformation, bestimmen:

$$\frac{e'_{11}\varkappa_1}{v^2} = +\mathbf{0{,}669 \cdot 10^{-8}},$$

$$\frac{e'_{41}\varkappa_1}{v^2} = +\mathbf{0{,}423 \cdot 10^{-8}}.$$

(Nur wenig hiervon verschiedene Werthe würde man erhalten haben, wenn man die bei den älteren Bestimmungen gefundenen piëzooptischen und piëzoelektrischen Constanten benutzt hätte.)

Andererseits haben die elektrooptischen Beobachtungen ergeben (cf. S. 131):

$$\frac{e_{11}\varkappa_1}{v^2} = +\mathbf{1{,}40 \cdot 10^{-8}},$$

$$\frac{e_{41}\varkappa_1}{v^2} = +\mathbf{0{,}586 \cdot 10^{-8}}.$$

Demnach stimmen zwar die Vorzeichen der beobachteten und berechneten Constanten überein, aber e_{11} ist mehr als doppelt so gross wie e'_{11}, und auch e_{41} übertrifft e'_{41} um einen Betrag, welcher die Unsicherheit dieser Werthe erheblich übersteigt. Dies bedeutet, dass die Aenderungen der Doppelbrechung des Quarzes im elektrischen Felde thatsächlich zwar

gleichsinnig, aber viel grösser sind, wie diejenigen, welche die Deformation des Krystalles, die sich durch sein piezoelektrisches Verhalten bestimmt, allein zur Folge hat. Dieses Resultat, welches analog ist dem im II. Theile für Natriumchlorat gefundenen, führt zu dem Schlusse,

dass das elektrostatische Feld eine **directe**, der Feldintensität proportionale Einwirkung auf die Lichtbewegung im Quarz ausübt[1]).

Diese directe Wirkung ist gegeben durch die Formeln 44), wenn man darin den Constanten e_{11} und e_{41} die Werthe $(1{,}40-0{,}67)\frac{v^2}{\varkappa_1}10^{-8} = +0{,}255\cdot 10^{-8}v^2$ und $(0{,}586-0{,}423)\frac{v^2}{\varkappa_1}10^{-8} = +\,0{,}0475\cdot 10^{-8}v^2$ beilegt anstatt der — ebenfalls bei der Annahme $1+4\pi\varkappa_1 = \varkappa_1 = 4{,}6$ — für die Gesammtwirkung geltenden Werthe $e_{11} = 0{,}49\cdot 10^{-8}v^2$ und $e_{41} = 0{,}205\cdot 10^{-8}v^2$.

IV. Theil.

Turmalin.

§ 1. Allgemeine Formeln.

Für die zweite hemimorphe Tetartoëdrie des hexagonalen Systems (oder auch Hemimorphie des rhomboëdrischen Systems nach anderer Bezeichnungsweise), welcher die Krystalle des Turmalins angehören, nimmt der allgemeine Ansatz 6) für die Aenderung der Doppelbrechung im elektrischen Felde nachstehende specielle Form an:

76)
$$\left|\begin{aligned} B_{11}-\omega_o^{0^2} &= -e_{22}b+e_{13}c,\\ B_{22}-\omega_o^{0^2} &= +e_{22}b+e_{13}c,\\ B_{33}-\omega_e^{0^2} &= e_{33}c,\\ B_{23} &= e_{42}b,\\ B_{31} &= e_{42}a,\\ B_{12} &= -e_{22}a,\end{aligned}\right.$$

wobei vorausgesetzt ist, dass die Z^0-Axe die dreizählige Symmetrieaxe und die Y^0Z^0-Ebene eine der drei Symmetrieebenen ist. Speciell für den Turmalin soll noch festgesetzt werden, dass die positive Z^0-Axe nach dem antilogen Pol hin gerichtet ist, und dass die positive Y^0-Axe aus einer der am letzteren liegenden Flächen des Rhomboëders $+R$, oder, was dasselbe sagt, aus einer Kante des trigonalen Prismas austritt. Diese Verfügung ist nämlich auch bei der Untersuchung der Herren E. Riecke und W. Voigt über das piëzoelektrische Ver-

1) Es sei anlässlich dieses Resultates daran erinnert, dass beim Quarz auch die optische Wirkung einer thermischen Dilatation von derjenigen einer gleichen, durch mechanische Einwirkung erzeugten verschieden ist, wie ich in Wied. Ann. **37**, p. 305 gezeigt habe.

halten des Turmalins getroffen worden. — Der Ansatz 7) für die durch elastische Drucke erregten elektrischen Momente lautet dann

77)
$$\begin{cases} a = -\delta_{15} Z_x + 2\delta_{22} X_y, \\ b = \delta_{22}(X_x - Y_y) - \delta_{15} Y_z, \\ c = -\delta_{31}(X_x + Y_y) - \delta_{33} Z_z, \end{cases}$$

(worin für δ_{15} auch δ_{24} geschrieben werden könnte), und die Gleichungen 8) für das reciproke Phänomen, d. h. die Deformation in Folge der dielektrischen Polarisation a, b, c, werden:

78)
$$\begin{cases} x_x = -\delta_{22}\frac{b}{\varkappa_1} + \delta_{31}\frac{c}{\varkappa_3}, \\ y_y = +\delta_{22}\frac{b}{\varkappa_1} + \delta_{31}\frac{c}{\varkappa_3}, \\ z_z = \delta_{33}\frac{c}{\varkappa_3}, \\ y_z = \delta_{15}\frac{b}{\varkappa_1}, \\ z_x = \delta_{15}\frac{a}{\varkappa_1}, \\ x_y = -2\delta_{22}\frac{a}{\varkappa_1}, \end{cases}$$

worin $\varkappa_1$ ($= \varkappa_2$) und $\varkappa_3$ die Constanten der dielektrischen Polarisation für die Richtungen senkrecht bezw. parallel zur Hauptaxe (Z^0) bezeichnen.

Die Grundformeln für die Berechnung der Aenderungen der Doppelbrechung durch elastische Deformationen haben dieselbe Form, wie beim Quarz, wo sie als Formelsystem 45), S. 84, bereits angegeben sind. Ebenso stimmen die Relationen zwischen den elastischen Deformationen und Drucken mit den beim Quarz unter 49), S. 85, angeführten völlig überein.

Die Ausdrücke, welche für die elektrooptischen Constanten im Falle nur indirecter, d. h. durch die Deformation des Krystalles vermittelter optischer Wirkung des elektrischen Feldes gelten würden, und deren allgemeine Form in 9), S. 8, angegeben ist, gehen hier zufolge der speciellen Form der Gleichungen 78) und 45) über in:

79)
$$\begin{cases} e'_{22} = \frac{1}{\varkappa_1}\{(a_{11} - a_{12})\delta_{22} - a_{14}\delta_{15}\}, \\ e'_{42} = \frac{1}{\varkappa_1}\{-2a_{41}\delta_{22} + a_{44}\delta_{15}\}, \\ e'_{13} = \frac{1}{\varkappa_3}\{(a_{11} + a_{12})\delta_{31} + a_{13}\delta_{33}\}, \\ e'_{33} = \frac{1}{\varkappa_3}\{2a_{31}\delta_{31} + a_{33}\delta_{33}\}. \end{cases}$$

§ 2. Elektrooptische Beobachtungen.

Die piëzoelektrischen Moduln sowohl als die Elasticitätsmoduln sind durch die Untersuchungen der Herren E. Riecke und W. Voigt bereits bekannt für dunkelgrünen brasilianischen Turmalin, und es wäre daher, um die durch 79) gegebenen Grössen $e'_{mn}\varkappa_n$ berechnen und mit den beobachteten $e_{mn}\varkappa_n$ vergleichen zu können, wünschenswerth gewesen, die elektrooptische und piëzooptische Untersuchung ebenfalls an jenem Material auszuführen. Dies war aber leider ganz unmöglich in Folge der starken Absorption des ordentlichen Strahles, welcher nur in so dünnen Lamellen noch durchgelassen wird, dass eine Messung der Aenderungen des Gangunterschiedes ausgeschlossen ist. Dasselbe gilt überhaupt von den meisten Turmalinvarietäten.

Hinreichend durchsichtig auch für den ordentlichen Strahl sind die hellgrünen und rosenrothen Krystalle von Elba, von denen ich mir daher (durch Herrn Mineralienhändler Pech in Berlin) eine Anzahl schöner Exemplare verschaffte. Die aus denselben hergestellten Präparate erwiesen sich aber selbst an den ganz einschluss- und sprungfreien Stellen als so stark optisch gestört, dass sie zur optischen Untersuchung ganz unbrauchbar waren. Geringer waren die optischen Anomalien an einer kleinen senkrecht zur optischen Axe geschnittenen Platte eines blauen Turmalins, welche sich in der Sammlung optischer Präparate des Göttinger physikalischen Institutes vorfand und welche, wenngleich sie ziemlich stark absorbirend war, bei Anwendung weissen Lichtes noch die Wahrnehmung der Interferenzringe zwischen gekreuzten Nicols gestattete. Aus zwei ganz ähnlichen, wahrscheinlich von Mursinsk stammenden blauen Krystallen, welche mir Herr Prof. Liebisch freundlichst zur Verfügung gestellt hatte, wurden zwei weitere Präparate, eins für Beobachtungen parallel der optischen Axe und eins für solche in einer dazu senkrechten Richtung, hergestellt. Doch waren die ungestörten Theile dieser Krystalle zu klein, um die Herstellung aller der Präparate zu ermöglichen, welche zur Bestimmung sämmtlicher Constanten e_{mn} und a_{hk} erforderlich gewesen wären. Ausserdem war es fraglich, ob die Elasticitätsconstanten, welche man ja zur Bestimmung der a_{hk} kennen muss, für diese Turmalinvarietät mit denjenigen des von Herrn Voigt untersuchten Krystalles übereinstimmten, und es musste daher auf die Ermittelung der piëzooptischen Constanten überhaupt verzichtet werden. Ueber das elektrooptische Verhalten gelang es aus dem angeführten Grunde auch nur, einige wesentlich qualitative Resultate zu erhalten. Dieselben betreffen erstens die in der Richtung der Hauptaxe auftretende Doppelbrechung bei dielektrischer Polarisation senkrecht zur Hauptaxe, zweitens die Aenderung des Gangunterschiedes in einer zur Hauptaxe senkrechten Richtung bei dielektrischer Polarisation parallel der Hauptaxe, und sollen im Folgenden näher erörtert werden.

a. Kraftlinien senkrecht zur Hauptaxe.

Liegt die Richtung der Kraftlinien in der zur Hauptaxe senkrechten X^0Y^0-Ebene, so fällt mit ihr die Richtung des inducirten Momentes m zusammen, da das Inductionsellipsoid hier ein Rotationsellipsoid ist. Bildet ihre Richtung den Winkel ψ mit der Y^0-Axe — positiv gerechnet gegen die $-X^0$-Axe hin —, so ist also $a = -m\sin\psi$, $b = m\cos\psi$, und die Gleichungen 76) werden:

80) $$\left|\begin{array}{l} B_{11}-\omega_o^{0^2} = -(B_{22}-\omega_o^{0^2}) = -e_{22}m\cos\psi, \qquad B_{33}-\omega_e^{0^2} = 0, \\ B_{23} = e_{42}m\cos\psi, \qquad B_{31} = -e_{42}m\sin\psi, \qquad B_{12} = e_{22}m\sin\psi. \end{array}\right.$$

Wegen der starken natürlichen Doppelbrechung des Turmalins sind die Grössen B_{23} und B_{31} jedenfalls sehr klein gegen $B_{22}-B_{33}$ und $B_{11}-B_{33}$, folglich auch die durch $\frac{B_{23}}{B_{22}-B_{33}}$ bezw. $\frac{B_{31}}{B_{33}-B_{11}}$ gegebenen Abweichungen der optischen Symmetrieaxe Z von der Hauptaxe Z^0 gegen die $-Y^0$- bezw. X^0-Axe hin so verschwindend klein, dass sie für Beobachtungen in der Richtung Z^0 (und auch für solche senkrecht dazu) gar nicht in Betracht kommen, und man also annehmen kann, dass die optischen Symmetrieaxen X und Y in der X^0Y^0-Ebene liegen. Der Winkel φ, welchen die eine von ihnen, etwa X, mit X^0 bildet, ist dann zufolge der dritten von den allgemeinen Gleichungen 3) gegeben durch

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2B_{12}}{B_{11}-B_{22}},$$

d. i. nach Einsetzung der Ausdrücke 80):

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\,e_{22}m\sin\psi}{-2\,e_{22}m\cos\psi} = -\operatorname{tg}\psi;$$

folglich ist, unabhängig von der Stärke des inducirten Momentes und von dem Werthe der Constante e_{22},

81) $$\varphi = -\tfrac{1}{2}\psi.$$

Da nun die Symmetrieaxen X, Y die Polarisationsrichtungen der beiden Wellen sind, welche sich in der Richtung der Hauptaxe Z^0 fortpflanzen, so gilt für dieselben folgender Satz:

Dreht sich die Richtung der Kraftlinien in der X^0Y^0-Ebene von einer polaren Nebenaxe Y^0 aus um einen Winkel ψ nach links, so dreht sich die eine Schwingungsrichtung Y, welche bei der Anfangslage $\psi = 0$ mit ersterer zusammenfiel, um die Hälfte jenes Winkels nach rechts.

Dieses Verhalten ist ganz analog demjenigen, welches der Quarz bei dielektrischer Polarisation senkrecht zur Hauptaxe zeigen würde, mit dem einzigen

Unterschiede, dass hier die Y^0-Axe dieselbe Rolle spielt, wie beim Quarz die X^0-Axe, weil hier die erstere, beim Quarz die letztere eine polare Richtung ist. Beim Quarz würden jedoch wegen seiner Circularpolarisation die oben bestimmten „Schwingungsrichtungen" die grossen Hauptaxen der Schwingungsellipsen und daher nicht direct als Auslöschungsrichtungen im polarisirten Lichte nachweisbar sein, wie dies bei nicht circularpolarisirenden Krystallen der Fall ist. Daher muss sich der Turmalin zur Beobachtung der in Rede stehenden Erscheinung an und für sich viel besser eignen, und in der That konnte dieselbe an der oben erwähnten blauen Turmalinplatte trotz deren geringer Dicke wahrgenommen werden, wenn intensives weisses Licht angewandt wurde. Diese Platte besass als seitliche Begrenzung noch die natürlichen Krystallflächen und zwar die Flächen des hexagonalen Prismas in alternirender Combination mit denen des trigonalen Prismas, so dass sich ihr Umriss als ein (etwas verzerrtes) Sechseck mit 3 spitzeren und 3 stumpferen Ecken darstellte, ungefähr wie in nebenstehender Figur angedeutet ist. Die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken des Sechsecks sind dann die polaren Nebenaxen, und zwar entspricht diejenige Richtung einer solchen Verbindungslinie, welche nach der spitzeren Ecke hinführt, nach unserer Festlegung des Axensystems der positiven Y^0-Axe. — Im senkrecht zu den Breitseiten, also parallel zur optischen Axe einfallenden Licht wurde die Platte zwischen gekreuzten Nicols nicht vollständig dunkel, sondern zeigte in Folge anomaler Doppelbrechung drei von ihrem Mittelpunkt nach den spitzeren Ecken hin verlaufende schmale helle Streifen (durch punktirte Linien in Fig. 13 angedeutet). Die zwischen diesen Streifen liegenden drei Sectoren löschten aber nahezu vollständig aus, und es konnte daher die Aufhellung derselben bei dielektrischer Polarisation der Platte und die Stellung der Nicols, bei welcher diese Aufhellung verschwand, beobachtet werden. Um diese Auslöschungsrichtungen bei verschiedener Richtung der Kraftlinien in der Platte bestimmen zu können, war folgende Anordnung getroffen. Die Platte war mit etwas Wachs vor das eine Ende einer Glasröhre von etwas kleinerem inneren Durchmesser geklebt, deren anderes, offenes Ende mittelst eines Korkes in der centralen Durchbohrung eines vertikalen, drehbaren Theilkreises so befestigt war, dass die Axe der Röhre mit der Drehungsaxe des Theilkreises zusammenfiel. Diese Vorrichtung wurde zwischen den beiden schon früher erwähnten, mit drehbaren Theilkreisen versehenen grossen Nicol'schen Prismen so aufgestellt, dass man der Länge nach durch die Glasröhre hindurchsehen, und dass sich das durch die Turmalinplatte verschlossene Ende der letzteren frei zwischen zwei horizontalen, durch Hartgummistücke von geeigneter Höhe von einander getrennten Metallplatten drehen konnte. Von diesen Metallplatten stand die untere mit der Erde, die obere mit dem einen Pol der Influenzmaschine in leitender Verbindung, so dass durch langsames Drehen der letzteren zwischen

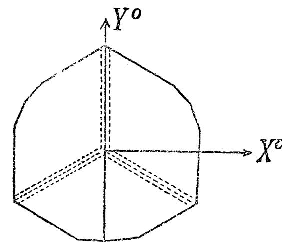


Fig. 13

ihnen ein elektrisches Feld erzeugt wurde, dessen Intensität in Folge des Ueberspringens der Funken zwischen den Elektroden der Maschine wechselte, und dessen Kraftlinien von oben nach unten durch die Turmalinplatte parallel zu deren Breitseiten, also in der $X^0 Y^0$-Ebene, hindurchgingen. Durch Drehen des die Glasröhre tragenden Theilkreises konnte dann die Richtung der X^0- und Y^0-Axe relativ zu der festbleibenden Kraftlinienrichtung um beliebige messbare Winkel geändert werden.

Zunächst wurde die Turmalinplatte so justirt, dass sie zwischen gekreuzten Nicols möglichst dunkel erschien und bei Drehung der Glasröhre um ihre Axe auch blieb. Dann beobachtete man die Aufhellung bezw. die Helligkeitsänderungen der Platte, welche beim Drehen der Influenzmaschine auftraten. Es zeigte sich zunächst, dass die Helligkeitsänderungen ein Maximum erreichten, wenn eine der oben erwähnten hellen Linien, also eine polare Nebenaxe der Platte, vertikal und somit parallel den Kraftlinien, und die Nicol-Hauptschnitte unter $\pm 45^0$ dagegen geneigt standen, sowie auch dann, wenn jene Nebenaxe horizontal und der eine Nicol-Hauptschnitt ebenfalls horizontal, der andere vertikal stand; dies steht mit dem S. 152 ausgesprochenen theoretischen Satze in Einklang. Nun wurden bei verschiedenen Stellungen des die Glasröhre tragenden Theilkreises T diejenigen Stellungen der Nicols bestimmt, bei welchen die Intensitätsänderung verschwand, und zwar in der Weise, dass die Stellungen von T aufgesucht wurden, bei welchen dieselbe eben noch wahrnehmbar war, und das Mittel aus je zwei solchen Ablesungen genommen wurde; denn dieses letztere giebt dann die Stellung an, bei welcher völliges Verschwinden der Aufhellung eintritt, also die eine Schwingungsrichtung der durch dielektrische Polarisation doppeltbrechend gewordenen Turmalinplatte mit der des Analysators zusammenfällt. Auf diese Weise wurden folgende zusammengehörige Stellungen des Theilkreises T und des Analysators A, zu welchem der Polarisator immer gekreuzt gestellt war, gefunden.

A	246^0	231^0	226^0	222^0	216^0	210^0	201^0
T	30^0	$\underbrace{15^0,\ 24^0}_{19\frac{1}{2}^0}$	$\underbrace{10^0,\ 19^0}_{14\frac{1}{2}^0}$	$\underbrace{8^0,\ 15^0}_{11\frac{1}{2}^0}$	$\underbrace{6^0,\ 14^0}_{10^0}$	$\underbrace{2^0,\ 10^0}_{6^0}$	$\underbrace{-5^0,\ +4^0}_{-\frac{1}{2}^0}$

Bei der ersten Stellung ($A = 246^0$, $T = 30^0$) war sowohl die Polarisationsebene des Analysators, als die eine polare Nebenaxe Y^0 des Turmalins vertikal, also parallel den Kraftlinien; die dabei abgelesenen Winkel seien mit A^0, T^0 bezeichnet. Der von dieser Stellung aus gerechnete Drehungswinkel $T - T^0$ ergiebt die relative Drehung der Kraftlinien gegen die Y^0-Axe, also den in den Formeln 80) und 81) mit ψ bezeichneten Winkel (vergl. nebenstehende Figur). Ferner ist $A^0 - A$ der Winkel zwischen der Schwingungsrichtung Y und der hier fest-

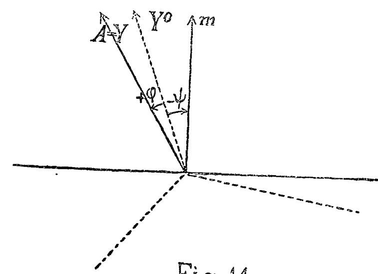


Fig 14.

bleibenden Richtung m der Kraftlinien, somit nach der früheren Bezeichnung mit Berücksichtigung des Vorzeichens $= -\psi + \varphi$. Nun ist nach der Formel 81) $\varphi = -\frac{1}{2}\psi$, $\psi - \varphi = \frac{3}{2}\psi$; also muss der Theorie zufolge

$$T^0 - T = \tfrac{2}{3}(A^0 - A)$$

sein. Die beobachteten und hiernach berechneten Winkel sind folgende:

$A^0 - A$ beobachtet:	15°	20°	24°	30°	36°	45°
$T^0 - T$ beobachtet:	$10\frac{1}{2}$°	$15\frac{1}{2}$°	$18\frac{1}{2}$°	20°	24°	$30\frac{1}{2}$°
$T^0 - T$ berechnet:	10°	$13\frac{1}{3}$°	16°	20°	24°	30°.

Die Abweichungen von den theoretischen Werthen sind nicht grösser, als die durch die geringe Intensität der Aufhellung der Platte bedingte Unsicherheit der Einstellung, welche, wie die oben angegebenen Grenzen von T zeigen, leicht einige Grade betragen konnte. — Ueber das Intervall von $A^0 - A = 0$ bis $A^0 - A = 45^0$ hinaus brauchten die Beobachtungen nicht fortgesetzt zu werden, weil bei $A^0 - A = 45^0$, $T^0 - T = 30^0$ bereits eine der beiden anderen polaren Nebenaxen horizontal liegt und sich somit bei weiterer Drehung der Platte dieselben relativen Lagen des Krystalles gegen die Kraftlinien, welche schon im Intervall $T^0 - T = 0$ bis 30^0 vorkamen, in umgekehrter Reihenfolge wiederholen würden. (Vergl. Fig. 14, worin die positiven Richtungen der zwei anderen polaren Nebenaxen durch punktirte Linien angedeutet sind.)

Eine senkrecht zur Hauptaxe eines der oben erwähnten blauen Krystalle geschnittene Platte von 2,18 mm Dicke zeigte in Bezug auf die Auslöschungsrichtungen ebenfalls das der Theorie entsprechende Verhalten. An dieser Platte wurden auch einige Versuche gemacht, um die Stärke der durch dielektrische Polarisation hervorgerufenen Doppelbrechung in der Richtung der Hauptaxe zu bestimmen. Zu diesem Zwecke wurde die Platte zwischen den früher erwähnten Metallplatten so aufgestellt, dass die eine polare Nebenaxe Y^0 vertikal, also parallel den Kraftlinien des elektrischen Feldes stand; die Hauptschnitte der Nicols wurden unter $\pm 45^0$ gegen diese Richtung geneigt, und der Compensator in der gewöhnlichen Stellung, d. h. mit vertikalem Spalt, hinter die Platte gebracht. Wurde nun diejenige Metallplatte, gegen welche hin die $+Y^0$-Axe gerichtet war, negativ geladen, so musste der Compensator im Sinne abnehmender Zahlen gedreht werden, es war also $\varDelta$ negativ; bei Umkehrung der Ladung kehrte sich auch die Streifenverschiebung um, so dass $\varDelta$ positiv wurde. Der absolute Betrag von $\varDelta$ war 0,18 Umdrehungen bei einer (durch die Schlagweite der Maassflasche gemessenen) Potentialdifferenz von nahe 30 absoluten Einheiten. Der Abstand der Metallplatten war dabei = 5,5 mm, folglich das Potentialgefälle in Luft $\frac{30}{0{,}55} = 54{,}5$, und von diesem Werthe konnte auch das Potentialgefälle in der Turmalinplatte, da ihre Dicke gering war gegen ihre Höhe, nicht sehr verschieden sein. Demnach findet man für die durch das Potentialgefälle

$\frac{\partial V}{\partial y} = 1$ erzeugte relative Verzögerung, bezogen auf die Weglänge von 1 mm und ausgedrückt in Wellenlängen mittleren weissen Lichtes, für welches der Streifenabstand des Compensators = 23 und $\lambda = 570 \cdot 10^{-6}$ gesetzt werden kann:

$$\frac{\bar{\varDelta}}{L\,\partial V/\partial y} = \frac{-0{,}18}{23} \cdot \frac{1}{2{,}18 \cdot 54{,}5} = -\mathbf{0{,}66 \cdot 10^{-4}}.$$

Nun gilt, da die Y-Axe parallel dem Compensatorspalt und da hier $\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_o^0$ ist,

$$\frac{\bar{\varDelta}}{L} = \frac{n_o^{0^3}}{2\lambda} \frac{\omega_y^2 - \omega_z^2}{v^2};$$

ferner wird zufolge den Formeln 80), worin $\psi = 0$ zu setzen ist,

$$\omega_y^2 - \omega_z^2 = B_{22} - B_{11} = 2\,e_{22}\,m = -2\,e_{22}\,\varkappa_1 \frac{\partial V}{\partial y};$$

folglich

$$\frac{\bar{\varDelta}}{L\,\partial V/\partial y} = -\frac{n_o^{0^3}}{\lambda} \cdot \frac{e_{22}\,\varkappa_1}{v^2}$$

und nach Einsetzung des obigen Zahlenwerthes:

$$\frac{e_{22}\,\varkappa_1}{v^2} = +\frac{\lambda}{n_o^{0^3}} \cdot 0{,}66 \cdot 10^{-4}.$$

Der ordentliche Brechungsindex des Turmalins n_o^0 ist $= 1{,}637$, ferner ist, wie oben gesagt, $\lambda = 570 \cdot 10^{-6}$ anzunehmen, und somit erhält man schliesslich:

$$\frac{e_{22}\,\varkappa_1}{v^2} = +\mathbf{0{,}85 \cdot 10^{-8}}.$$

Andere Beobachtungen, bei welchen eine der anderen polaren Nebenaxen (von 4,95 mm Länge) den Kraftlinien parallel gerichtet und der Abstand der Metallplatten = 5,7 mm war, ergaben für $V = \pm 30$ im Mittel

$$\varDelta = +0{,}185 \text{ bezw. } -0{,}20,$$

woraus sich ergiebt
$$\frac{\bar{\varDelta}}{L\,\partial V/\partial y} = -0{,}73 \cdot 10^{-4}$$
und

$$\frac{e_{22}\,\varkappa_1}{v^2} = +\mathbf{0{,}95 \cdot 10^{-8}}.$$

Als wahrscheinlichen Werth dieser Constante können wir somit annehmen

$$\frac{e_{22}\,\varkappa_1}{v^2} = +\mathbf{0{,}9 \cdot 10^{-8}},$$

welches Resultat allerdings wegen der geringen Grösse der beobachteten Gangunterschiede Δ und der unsicheren Kenntniss von $\partial V / \partial y$ auf grosse Genauigkeit keinen Anspruch machen kann.

Hiernach ist die Constante $e_{22} \varkappa_1$ etwas kleiner als die analoge $e_{11} \varkappa_1$ des Quarzes, aber doch von derselben Grössenordnung. Die elektrooptische Constante e_{22} selbst hingegen ist erheblich kleiner als diejenige e_{11} des Quarzes; denn man findet mit Benutzung der von J. Curie bestimmten Dielektricitätsconstanten für Polarisationsrichtungen senkrecht zur Hauptaxe:

$$\text{für Quarz} \quad \frac{e_{11}}{v^2} = \frac{1{,}40 \cdot 4\pi}{4{,}55 - 1} \cdot 10^{-8} = \mathbf{4{,}95 \cdot 10^{-8}},$$

$$\text{für Turmalin} \quad \frac{e_{22}}{v^2} = \frac{0{,}9 \cdot 4\pi}{7{,}1 - 1} \cdot 10^{-8} = \mathbf{1{,}85 \cdot 10^{-8}}.$$

Für die Vergleichung der beobachteten elektrooptischen Wirkung mit der aus der Deformation berechneten kommt nur das Product $e_{22} \varkappa_1$ in Frage. Dieses müsste im Falle nur indirecter optischer Wirkung der dielektrischen Polarisation nach den Relationen 79) den Werth haben:

$$\frac{e'_{22} \varkappa_1}{v^2} = \frac{a_{11} - a_{12}}{v^2} \delta_{22} - \frac{a_{14}}{v^2} \delta_{15}.$$

Diese Formel zeigt — was vielleicht besonders hervorgehoben zu werden verdient —, dass für die Doppelbrechung in der Richtung der Hauptaxe, welche durch ein irgendwie senkrecht zu letzterer gerichtetes elektrisches Moment erzeugt wird, keineswegs die piëzoelektrische Erregung durch Druck senkrecht zur Hauptaxe, also die Constante δ_{22}, allein maassgebend ist, sondern ausserdem auch das durch die Constante δ_{15} charakterisirte piëzoelektrische Verhalten bei schief gegen die Hauptaxe gerichtetem Druck.

Nimmt man an, dass die piëzoelektrischen Eigenschaften der hier untersuchten blauen Turmalinvarietät mit denjenigen des brasilianischen Turmalins übereinstimmen, welcher von den Herren E. Riecke und W. Voigt untersucht worden ist[1]), so wäre zu setzen:

$$\delta_{22} = +0{,}67 \cdot 10^{-8}, \qquad \delta_{15} = -11 \cdot 10^{-8}.$$

Soll $e_{22} = e'_{22}$ sein, so muss also die Relation erfüllt sein:

$$82) \qquad 0{,}67 \cdot \frac{a_{11} - a_{12}}{v^2} + 11 \cdot \frac{a_{14}}{v^2} = 0{,}9.$$

Dieselbe zu prüfen, ist nun leider nicht möglich, da die piëzooptischen Constanten $\frac{a_{11} - a_{12}}{v^2}$ und $\frac{a_{14}}{v^2}$ aus dem früher angeführten Grunde nicht bestimmt werden konnten. Man kann jedoch aus der bekannten Thatsache, dass eine

1) E. Riecke und W. Voigt, Wied. Ann. **45**, 549. 1892.

Turmalinplatte durch einseitigen Druck senkrecht zur Hauptaxe in der Art optisch zweiaxig wird, dass die Ebene der optischen Axen zu der Druckrichtung senkrecht steht, eine Ungleichung zwischen jenen beiden Constanten herleiten, und es wäre an sich der Fall denkbar, dass deren Vereinbarkeit mit der obigen Gleichung wenigstens sehr unwahrscheinlich wäre. Wir wollen daher prüfen, wie es sich hiermit verhält.

Wirkt der einseitige Druck $p = 1$ parallel der X^0-Axe, so ist $\omega_y^2 - \omega_z^2 = B_{22} - B_{11}$, und für letztere Grösse ergiebt sich aus den Gleichungen 45) und 49) der Ausdruck

$$(a_{11} - a_{12})(s_{11} - s_{12}) + 2\, a_{14}\, s_{14}.$$

Nach der erwähnten Beobachtungsthatsache ist dann aber die ZY-Ebene die Ebene der optischen Axen, und, da im Turmalin ω_z die grösste Hauptlichtgeschwindigkeit ist, $\omega_x > \omega_z > \omega_y$, somit $\omega_y^2 - \omega_z^2 < 0$. Folglich ist auch

$$\frac{a_{11} - a_{12}}{v^2}(s_{11} - s_{12}) + 2\,\frac{a_{14}}{v^2}\, s_{14} < 0.$$

Setzt man noch die von Herrn Voigt[1]) für brasilianischen Turmalin gefundenen Werthe der Elasticitätsmoduln ein, so wird die gesuchte Ungleichung:

83) $$4{,}9\,\frac{a_{11} - a_{12}}{v^2} + 1{,}14 \cdot \frac{a_{14}}{v^2} < 0.$$

Dieselbe ist nun offenbar mit 82) verträglich, wenn man annimmt, dass $\frac{a_{11} - a_{12}}{v^2}$ einen negativen Werth besitzt, was nach Analogie des Quarzes wahrscheinlich ist, und dass $\frac{a_{14}}{v^2}$ positiv und dem absoluten Betrage nach kleiner wie $\frac{a_{11} - a_{12}}{v^2}$ ist. Letzteres gilt nämlich für die Constante $\frac{a_{14}}{v^2}$ des Quarzes, dagegen besitzt dieselbe negatives Vorzeichen; es ist aber nach der Bedeutung dieser Constante ein positiver Werth von vornherein nicht weniger wahrscheinlich. Der absolute Werth von a_{14} müsste dann allerdings zufolge 82) ein viel grösserer sein, wie beim Quarz; doch auch dies erscheint nicht gerade besonders unwahrscheinlich. Es ist also aus dieser Betrachtung kein Grund zu dem Schlusse, dass e_{22} und e'_{22} nicht übereinstimmen könnten, zu entnehmen. —

b. Kraftlinien parallel der Hauptaxe.

Da die Hauptaxe beim Turmalin eine polare Symmetrieaxe ist, so muss nach den allgemeinen Formeln auch eine der Hauptaxe parallele dielektrische Polarisation die Doppelbrechung beeinflussen, was beim Quarz nicht der Fall

---

1) W. Voigt, Nachrichten d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1890, 255—71.

ist. Nach Symmetrie muss dabei der Krystall optisch einaxig bleiben, und in der That ergeben die Formeln 76), wenn nur ein Moment c vorhanden ist,

$$B_{11} - \omega_o^{0^2} = B_{22} - \omega_o^{0^2} = e_{13}\, c, \qquad B_{33} - \omega_e^{0^2} = e_{33}\, c,$$
$$B_{23} = B_{31} = B_{12} = 0.$$

Die Aenderung der Stärke der Doppelbrechung ist demnach gegeben durch

84) $$(\omega_e^2 - \omega_o^2) - (\omega_e^{0^2} - \omega_o^{0^2}) = (e_{33} - e_{13})\, c = -(e_{33} - e_{13})\, \varkappa_3 \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Diese Aenderung muss nachweisbar sein durch die Aenderung des Gangunterschiedes in irgend einer Richtung senkrecht zur Hauptaxe in einem Turmalinprisma, welches mit zu den Kraftlinien paralleler Hauptaxe in ein elektrisches Feld gebracht wird. Zu diesem Zwecke war aus einem der blauen Krystalle ein rechtwinkliges Parallelepipedon geschnitten, dessen eine Kantenrichtung der Hauptaxe Z^0 parallel war. Da dasselbe in Folge optischer Störungen keine Beobachtungen mit dem Compensator auf den zu Z^0 parallelen Seitenflächen gestattete, so musste zum Nachweis der fraglichen Gangunterschiedsänderung die Beobachtung der Interferenzcurven im convergenten homogenen Lichte, welche wenigstens in der Richtung der kürzesten Kanten noch leidlich gut sichtbar waren, herangezogen werden. Das Prisma wurde daher zwischen zwei horizontal übereinanderliegenden und von einander durch Hartgummistücke isolirten kleinen Metallplatten, welche ebenso wie bei den unter a beschriebenen Versuchen zur Erzeugung des elektrischen Feldes dienten, mit vertikaler Hauptaxe und dem Beobachter zugewendeter Breitseite aufgestellt, und diese ganze Vorrichtung zwischen die beiden Linsensysteme eines Axenwinkelapparates, d. h. eines Polarisationsapparates für convergentes Licht mit horizontal liegender Axe, gebracht. Dann sah man die Curven gleichen Gangunterschiedes, — in diesem Falle gleichseitige Hyperbeln, deren Hauptaxen parallel und senkrecht zur Z^0-Axe liegen —, auf einen im Ocularrohr des Apparates angebrachten Glasmaassstab projicirt, so dass man die etwa eintretenden Verschiebungen derselben gut beurtheilen konnte.

Dasjenige Ende des Prismas, für welches ein besonderer Versuch gezeigt hatte, dass es durch Druck ($\parallel Z^0$) positiv elektrisch wurde, und aus welchem demnach nach unserer Festsetzung die positive Z^0-Axe austrat, befand sich oben. Wurde nun die obere Metallplatte positiv geladen, mithin ein negatives Moment c inducirt, so näherten sich die seitlichen Hyperbeln ein wenig dem Centrum des Gesichtsfeldes, während die oberen und unteren Hyperbeln etwas auseinanderrückten; umgekehrt verhielt es sich bei negativer Ladung der oberen Platte. Nun nimmt bei der vorausgesetzten Stellung der Krystallplatte der Gangunterschied nach oben und unten, d. h. bei Neigung der Fortpflanzungsrichtung von der Plattennormale aus gegen die Z^0-Axe hin ab, nach seitwärts zu, so dass einer Annäherung der Scheitel der seitlichen Hyperbeln und einer Entfernung derjenigen der oberen und unteren von einander eine Zunahme des

Gangunterschiedes entspricht. Somit wurde durch ein negatives Moment c eine Zunahme der Doppelbrechung, also, da der Turmalin negativ einaxig ist, ein positiver Werth von $(\omega_e^2-\omega_o^2)-(\omega_e^{0^2}-\omega_o^{0^2})$ hervorgerufen. Daraus folgt nach 84) die Ungleichung:

$$e_{33}-e_{13} < 0.$$

Nun ist nach 79)

$$e'_{33}-e'_{13} = \frac{1}{\varkappa_3}\{(2a_{31}-a_{11}-a_{12})\delta_{31}+(a_{33}-a_{13})\delta_{33}\};$$

wenn die e_{mn} mit den e'_{mn} identisch sind, so muss also die Ungleichung bestehen

$$(2a_{31}-a_{11}-a_{12})\delta_{31}+(a_{33}-a_{13})\delta_{33} < 0$$

oder nach Einsetzung der von den Herren E. Riecke und W. Voigt gefundenen Werthe der piëzoelektrischen Moduln $\delta_{31} = -0{,}88\cdot 10^{-8}$ und $\delta_{33} = -5{,}71\cdot 10^{-8}$:

85) $$0{,}88(2a_{31}-a_{11}-a_{12})+5{,}71(a_{33}-a_{13}) > 0.$$

Eine zweite Ungleichung zwischen denselben Aggregaten der piëzooptischen Constanten liefert das durch einen Versuch an dem oben erwähnten rechteckigen Turmalinprisma (welches dabei unter dem früher beschriebenen Compressionshebel zwischen den Linsen des Axenwinkelapparates aufgestellt war) gefundene Beobachtungsresultat, dass einseitiger Druck parallel der Z^0-Axe ebenfalls die negative Doppelbrechung verstärkt. Aus den Formeln 49) und 45) findet man für diesen Fall, wo $Z_z = p$ ist und alle anderen Druckcomponenten verschwinden,

$$\begin{aligned}(\omega_e^2-\omega_o^2)-(\omega_e^{0^2}-\omega_o^{0^2}) &= B_{33}-B_{11}-(\omega_e^{0^2}-\omega_o^{0^2})\\ &= -p\{(2a_{31}-a_{11}-a_{12})s_{13}+(a_{33}-a_{13})s_{33}\};\end{aligned}$$

folglich ist

$$(2a_{31}-a_{11}-a_{12})s_{13}+(a_{33}-a_{13})s_{33} < 0,$$

oder, da nach den schon citirten Bestimmungen von Herrn W. Voigt (a. a. O. p. 269) $s_{13} = -0{,}16\cdot 10^{-8}$, $s_{33} = +6{,}12\cdot 10^{-8}$ ist,

86) $$0{,}16(2a_{31}-a_{11}-a_{12})-6{,}12(a_{33}-a_{13}) > 0.$$

Auch diese beiden Ungleichungen 85) und 86) können gleichzeitig erfüllt sein, wenn nämlich $a_{33}-a_{13}$ einen negativen und $2a_{31}-a_{11}-a_{12}$ einen bedeutend grösseren positiven Werth besitzt, was nicht als unmöglich oder besonders unwahrscheinlich bezeichnet werden kann.

Demnach kann auch aus der Beobachtung über die Aenderung der Doppelbrechung des Turmalins durch dielektrische Polarisation parallel seiner Hauptaxe kein Schluss in Betreff der Frage, ob das elektrische Feld ausser der durch die Deformation bedingten noch eine directe optische Wirkung ausübt, gezogen

werden. Immerhin dürfte es von Interesse sein, dass die für diesen Fall von der allgemeinen Theorie der elektrooptischen Erscheinungen an piëzoelektrischen Krystallen vorausgesagte Aenderung der Doppelbrechung überhaupt nachgewiesen und ihr Vorzeichen festgestellt worden ist. —

V. Theil.

Seignettesalz.

Das rechtsweinsaure Kali-Natron, $KNaH_4C_4O_6 + 4H_2O$, gewöhnlich Seignettesalz genannt, krystallisirt in grossen prismatischen Krystallen, welche der sphenoidisch-hemiëdrischen Gruppe des rhombischen Systems angehören, also keine andern Symmetrieelemente als drei zu einander senkrechte zweizählige Symmetrieaxen besitzen. Sie können demnach piëzo- und pyroelektrische Erregbarkeit zeigen, und in der That ist eine solche von J. und P. Curie[1]) und Hankel und Lindenberg[2]) beobachtet worden. Letztere haben die Krystalle einem auf die Kanten zwischen (110) und (001) wirkenden Drucke ausgesetzt und gefunden, dass diejenigen Kanten, welche durch die linken Sphenoidflächen $\varkappa_l(111)$ abgestumpft würden, dabei positiv elektrisch werden. Bei Druck auf die Ecken eines Krystalles der Combination (110), (001) ergab sich dagegen keine Elektricitätsentwicklung, wie auch theoretisch vorauszusehen ist. Weitere Schlüsse lassen sich aus jenen Beobachtungen wegen der Ungleichförmigkeit der durch den Druck auf die Krystallkanten bewirkten Deformation nicht ziehen.

Die von mir untersuchten Krystalle, die von Herrn Goldbach stammten und mir durch Herrn Prof. Voigt freundlichst zur Verfügung gestellt wurden, waren begrenzt von den Flächen (110), (210), (010), (001), $\varkappa_l(111)$ und $\varkappa_r(211)$, letztere beiden als schmale Abstumpfungen ausgebildet. Dabei ist die von Müttrich (Pogg. Ann. **121**, 193. 1864) gewählte Aufstellung zu Grunde gelegt, bei welcher das Axenverhältniss ist: $a:b:c = 0{,}832:1:0{,}433$. Die Krystalle waren parallel den Prismenkanten $2^1/_2$ bis 3 cm lang und besassen 1 bis 2 cm Durchmesser; die Prismenzone war nur etwa zur Hälfte ausgebildet, da die Krystalle mit einer Fläche dieser Zone aufgelegen hatten. Zwar enthielten die Krystalle streckenweise kleine Einschlüsse von Bläschen, aber es waren doch grosse ganz homogene Partien vorhanden. Leider gelang es trotzdem nicht, Präparate von der wünschenswerthen Grösse und Güte der Flächen zu erhalten, weil die Bearbeitung infolge der grossen Sprödigkeit der Krystalle — welche bisweilen schon durch die Handwärme zerspringen und deshalb nicht aufgekittet werden können — äusserst schwierig war.

---

1) J. u. P. Curie, Compt. rend. **91**, 294—95; 383—87. 1880.
2) Hankel u. Lindenberg, Abhandl. d. K. sächs. Ges. d. Wiss. **18**, 361—405. 1892.

Für die optischen Constanten, soweit sie zur Rechnung gebraucht wurden, habe ich die von Müttrich[1]) bestimmten Werthe angenommen. Derselbe fand folgende Hauptbrechungsindices für Na-Licht („gelbes“ Licht):

	α	β	γ
bei 15°	1,49155	1,49333	1,49683
„ 25°	1,49134	1,49314	1,49659

und den Axenwinkel

$$2\Omega = 70^0 56' \text{ bei } 15^0, \quad = 72^0 10' \text{ bei } 25^0.$$

Die erste Mittellinie ist die krystallographische Axe a (die „Brachydiagonale“), die zweite Mittellinie die Axe c, und somit, wenn wir festsetzen, dass die Coordinatenaxen X^0, Y^0, Z^0 der Reihe nach mit a, b, c zusammenfallen, nach unserer üblichen Bezeichnungsweise:

$$n_x = 1{,}49671, \qquad n_y = 1{,}49324, \qquad n_z = 1{,}49145 \text{ für } 20^0,$$

also

$$\omega_x < \omega_y < \omega_z.$$

Die Differenzen der Hauptbrechungsindices sind:

	$n_y - n_z$	$n_x - n_z$	$n_x - n_y$
bei 15°	0,00178	0,00528	0,00350
„ 35°	0,00185	0,00520	0,00335

folglich die Aenderungen für 1° Temperaturzunahme:

$$\frac{d(n_y - n_z)}{dt} = +0{,}0000035,$$

$$\frac{d(n_x - n_z)}{dt} = -0{,}000004,$$

$$\frac{d(n_x - n_y)}{dt} = -0{,}0000075.$$

Die Haupt-Dielektricitätsconstanten sind neuerdings von Herrn Borel[2]) nach der Methode von Boltzmann bestimmt worden. Derselbe fand (bei Anwendung eines 174 mal in der Secunde wechselnden Feldes):

$$K_1 = 8{,}89, \qquad K_2 = 6{,}92, \qquad K_3 = 6{,}70,$$

woraus sich ergiebt: $\varkappa_1 = 0{,}628, \qquad \varkappa_2 = 0{,}471, \qquad \varkappa_3 = 0{,}454.$

§ 1. **Allgemeine Formeln.**

Der allgemeine Ansatz 6) für die umkehrbaren optischen Wirkungen der dielektrischen Polarisation a, b, c nimmt für rhombisch-sphenoidische Krystalle die einfache Gestalt an:

1) Müttrich, Pogg. Ann. **121**, 193, 398. 1864.

2) Ch. Borel, Arch. sciences phys. et nat. Genève. (3) **29**, 131, 219, 327. 1893.

87)
$$\left| \begin{array}{l} B_{11} - \omega_x^{0^2} = B_{22} - \omega_y^{0^2} = B_{33} - \omega_z^{0^2} = 0; \\ B_{23} = e_{41} a, \quad B_{31} = e_{52} b, \quad B_{12} = e_{63} c. \end{array} \right.$$

Die piezoelektrische Erregung ist nach der Theorie von Herrn Voigt gegeben durch

88)
$$\left| \begin{array}{l} a = -\delta_{14} Y_z, \\ b = -\delta_{25} Z_x, \\ c = -\delta_{36} X_y; \end{array} \right.$$

folglich sind nach den Gleichungen 8) die Deformationen im elektrischen Felde:

89)
$$\left| \begin{array}{c} x_x = y_y = z_z = 0, \\ y_z = \delta_{14} \dfrac{a}{\varkappa_1}, \quad z_x = \delta_{25} \dfrac{b}{\varkappa_2}, \quad x_y = \delta_{36} \dfrac{c}{\varkappa_3}. \end{array} \right.$$

Ferner ist die Aenderung der Doppelbrechung durch Deformationen $x_x \ldots y_z \ldots$ bestimmt durch

90)
$$\left| \begin{array}{l} B_{11} - \omega_x^{0^2} = a_{11} x_x + a_{12} y_y + a_{13} z_z, \\ B_{22} - \omega_y^{0^2} = a_{21} x_x + a_{22} y_y + a_{23} z_z, \\ B_{33} - \omega_z^{0^2} = a_{31} x_x + a_{32} y_y + a_{33} z_z, \\ B_{23} = a_{44} y_z, \\ B_{31} = a_{55} z_x, \\ B_{12} = a_{66} x_y. \end{array} \right.$$

Sind die Deformationen die durch 89) gegebenen, so werden von den vorstehenden Grössen die drei ersten gleich Null und die drei letzten beziehungsweise gleich

$$\frac{a_{44} \delta_{14}}{\varkappa_1} a, \qquad \frac{a_{55} \delta_{25}}{\varkappa_2} b, \qquad \frac{a_{66} \delta_{36}}{\varkappa_3} c,$$

woraus folgt, dass für die allgemein durch die Formeln 9) gegebenen Constanten, welche die optische Wirkung der im elektrischen Felde eintretenden Deformation bestimmen, hier die Ausdrücke gelten:

91)
$$e'_{41} = \frac{a_{44} \delta_{14}}{\varkappa_1}, \qquad e'_{52} = \frac{a_{55} \delta_{25}}{\varkappa_2}, \qquad e'_{63} = \frac{a_{66} \delta_{36}}{\varkappa_3}.$$

Die Verhältnisse liegen hier für die Untersuchung der Frage, ob die beobachteten e_{kh} mit den aus vorstehenden Relationen berechneten e'_{kh} identisch sind, insofern besonders günstig, als in jeder der letztern nur eine piëzoelektrische und eine piëzooptische Constante vorkommt, sodass man, selbst wenn es nicht gelingt, deren absolute Werthe zu ermitteln, doch schon aus dem Vorzeichen der Grössen δ_{hk} und a_{kk} (oder der zunächst gefundenen $a_{kk} s_{kk}$, da man weiss, dass die Torsionsmoduln s_{kk} sicher positiv sind) einerseits, und der e_{kh} andererseits

ersehen kann, ob die Relationen 91) erfüllt sein können oder nicht. Zudem hat man den Vortheil, je zwei der Grössen δ_{hk} und e_{kh}, z. B. δ_{14} und e_{41}, an einer einzigen Platte, die einer der Symmetrieebenen parallel geschnitten ist, bestimmen zu können. Nur die Ermittelung der a_{kk} erfordert mehr Beobachtungen und macht deshalb grössere Schwierigkeiten. Ein weiterer Vorzug, den das Seignettesalz bei der Untersuchung der Aenderungen des optischen Verhaltens vor den meisten andern optisch zweiaxigen Krystallen ohne Centrum der Symmetrie voraus hat, ist seine verhältnissmässig schwache Doppelbrechung, welche es ermöglicht, noch in ziemlich dicken Präparaten die Gangunterschiedsänderungen (natürlich in homogenem Licht) mittelst des Compensators zu messen, und zwar selbst in Richtungen, welche gegen die Symmetrieaxen geneigt sind. Wenn trotz dieser günstigen Aussichten die Untersuchung nicht zu Resultaten von der wünschenswerthen Sicherheit führte, so lag das theils an der Unmöglichkeit, Platten mit gut polirten, ebenen Flächen herzustellen, theils an besonderen Eigenthümlichkeiten des piëzoelektrischen und elektrooptischen Verhaltens des Seignettesalzes, welche weiter unten Erwähnung finden werden.

§ 2. **Theorie der elektrooptischen Beobachtungen.**

Da nach 87) infolge dielektrischer Polarisation nur B_{23}, B_{31}, B_{12} von Null verschiedene Werthe annehmen, während B_{11}, B_{22}, B_{33} ihre Anfangswerthe behalten, und da jene Werthe von B_{23}, B_{31}, B_{12} bei den praktisch erreichbaren Feldstärken klein sein werden gegen diejenigen der Differenzen $B_{22}-B_{33} = \omega_y^{0^2}-\omega_z^{0^2}$, $B_{33}-B_{11} = \omega_z^{0^2}-\omega_x^{0^2}$, $B_{11}-B_{22} = \omega_x^{0^2}-\omega_y^{0^2}$, so besteht die Aenderung des optischen Verhaltens nur in einer geringen Drehung der optischen Symmetrieaxen, während die Hauptlichtgeschwindigkeiten bis auf kleine Grössen 2ter Ordnung ungeändert bleiben. Jene Drehung setzt sich im allgemeinen Fall zusammen aus folgenden, immer im Sinne entgegen der Bewegung des Uhrzeigers positiv gerechneten Componenten[1]):

92)
$$\left|\begin{array}{ll} \text{Drehung um die } X^0\text{-Axe} & \Phi_x = \dfrac{B_{23}}{B_{22}-B_{33}} = \dfrac{e_{41}\,a}{\omega_y^{0^2}-\omega_z^{0^2}}, \\ \text{„ „ „ } Y^0\text{-Axe} & \Phi_y = \dfrac{B_{31}}{B_{33}-B_{11}} = \dfrac{e_{52}\,b}{\omega_z^{0^2}-\omega_x^{0^2}}, \\ \text{„ „ „ } Z^0\text{-Axe} & \Phi_z = \dfrac{B_{11}}{B_{11}-B_{22}} = \dfrac{e_{63}\,c}{\omega_x^{0^2}-\omega_y^{0^2}}. \end{array}\right.$$

Jede Drehungscomponente bestimmt sich lediglich durch die Componente des Momentes parallel ihrer Drehungsaxe. Wir können daher die Fälle, wo das Moment in eine der Symmetrieaxen fällt, getrennt betrachten; auch war bei den Versuchen die Anordnung stets in dieser Weise getroffen, um die durch eine der Constanten e_{kh} definirte Wirkung jedesmal allein zu bekommen.

---

1) Vergl. F. Pockels, Wied. Ann. **37**, 155—157. 1889.

Es werde zunächst angenommen, dass die Kraftlinien parallel der X^0-Axe durch den Krystall gehen, mithin nur ein Moment $a = -\varkappa_1 \frac{\partial V}{\partial x}$ vorhanden ist. Die dadurch verursachte Drehung Φ_x der optischen Symmetrieaxen Y und Z wird zu klein sein, um direkt, etwa als Drehung der Auslöschungsrichtungen einer zur Y^0Z^0-Ebene parallelen Platte, wahrnehmbar zu sein. Sie wird sich aber zu erkennen geben in einer Aenderung des Gangunterschiedes der beiden Wellen, die sich in einer gegen die Y^0-Axe geneigten, in der Y^0Z^0-Ebene liegenden Richtung fortpflanzen. Die Differenz der Quadrate der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ist nämlich für diese Wellen:

$$\omega_1^2 - \omega_2^2 = \omega_y^2 \sin^2 \varphi + \omega_z^2 \cos^2 \varphi - \omega_x^2,$$

wenn φ den Winkel zwischen der Wellennormale N und der Y-Axe bezeichnet. Wie schon bemerkt, können darin ω_y, ω_z, ω_x durch ihre ursprünglichen Werthe ersetzt werden. Dagegen geht φ, wenn sein anfänglicher, also von Y^0 aus gerechneter Werth φ^0 war, über in $\varphi^0 - \Phi_x$, folglich wird im elektrischen Felde

$$\omega_1^2 - \omega_2^2 = \omega_y^{0^2} \sin^2 (\varphi^0 - \Phi_x) + \omega_z^{0^2} \cos^2 (\varphi^0 - \Phi_x) - \omega_x^{0^2}$$

oder, wenn man Φ_x^2 vernachlässigt,

$$= \omega_y^{0^2} \sin^2 \varphi^0 + \omega_z^{0^2} \cos^2 \varphi^0 - \omega_x^{0^2} - 2 \sin \varphi^0 \cos \varphi^0 \cdot \Phi_x \cdot (\omega_y^{0^2} - \omega_z^{0^2})$$
$$= (\omega_1^{0^2} - \omega_2^{0^2}) - \sin 2\varphi^0 \cdot \Phi_x (\omega_y^{0^2} - \omega_z^{0^2})$$

oder unter Benutzung der ersten der Gleichungen 92)

$$= \omega_1^{0^2} - \omega_2^{0^2} - \sin 2\varphi^0 \cdot e_{41} a.$$

Folglich ist

93) $$\omega_1^2 - \omega_2^2 - (\omega_1^{0^2} - \omega_2^{0^2}) = -e_{41} a \sin 2\varphi^0,$$

wo sich ω_1 auf die parallel zur Y^0-Axe, ω_2 auf die in der Y^0Z^0-Ebene polarisirte Welle bezieht. Ihre grössten Werthe erreicht die Aenderung des Gangunterschiedes also in den Richtungen, welche die Winkel zwischen der Z^0- und Y^0-Axe halbiren, nämlich

$$-e_{41} a \text{ für } \varphi^0 = +45^0$$
$$+e_{41} a \;\;,,\;\; \varphi^0 = -45^0.$$

An einer rechteckigen Platte, deren breite Seitenflächen der Y^0Z^0-Ebene parallel sind, und welche senkrecht zu letzterer dielektrisch polarisirt wird, wird man demnach mit dem Compensator auf den beiden Schmalseitenpaaren entgegengesetzt gleiche relative Verzögerungen beobachten, welche mit $\pm e_{41} a \sin 2\varphi^0$ proportional sind. Am zweckmässigsten wird es sein, den Winkel φ^0, welchen die Schmalseiten der Platte mit der Y^0- beziehungsweise Z^0-Axe bilden, $= 45^0$

zu machen, was für die Herstellung der Präparate deshalb vorgeschrieben war.

Bei der Berechnung von e_{41} aus den erwähnten Compensatorbeobachtungen ist noch die Dickenänderung in der Beobachtungsrichtung zu berücksichtigen, welche die Platte infolge der durch die Formeln 89) gegebenen Deformation erleidet. Die letztere ist im jetzt betrachteten Falle: $y_z = \frac{\delta_{14} a}{\varkappa_1}$, $z_x = x_y = 0$, woraus die Dilatation $\frac{L-L^0}{L^0} = \frac{1}{2} \sin 2\varphi^0 \frac{\delta_{14} a}{\varkappa_1}$ in der Richtung φ^0 folgt.

Demnach ist zufolge der Formel 11) der durch das elektrische Moment a erzeugte Gangunterschied in Wellenlängen:

$$\bar{\Delta}_a = \frac{L}{\lambda} \left\{ \frac{+n_1^{0^3}}{2} \frac{e_{41}}{v^2} a \sin 2\varphi^0 + (n_1^0 - n_2^0) \tfrac{1}{2} \sin 2\varphi_0 \frac{\delta_{14}}{\varkappa_1} a \right\}$$

$$= \frac{L}{\lambda} \frac{a \sin 2\varphi^0}{2\varkappa_1} \left\{ \frac{e_{41}}{v^2} \varkappa_1 n_1^{0^3} + (n_1^0 - n_2^0) \delta_{14} \right\},$$

oder die behufs Compensation auszuführende Anzahl von Umdrehungen der Mikrometerschraube bei Beobachtung mit Na-Licht:

$$94) \qquad \Delta_a = 23{,}8 \frac{L}{\lambda} \cdot \frac{\sin 2\varphi^0}{2} \cdot \frac{a}{\varkappa_1} \left\{ -n_1^{0^3} \frac{e_{41} \varkappa_1}{v^2} + (n_2^0 - n_1^0) \delta_{14} \right\}.$$

Darin ist $\lambda = 589{,}2 \cdot 10^{-6}$, $n_2^0 = n_x^0$, $n_1^0 = \sqrt{n_y^{0^2} \sin^2\varphi^0 + n_z^{0^2} \cos^2\varphi^0}$, im Falle $\varphi^0 = 45^0$ also annähernd $= \frac{1}{2}(n_y^0 + n_z^0)$. Das Vorzeichen ist bestimmt unter der Voraussetzung, dass die Streifen des Compensators parallel den Kraftlinien gerichtet sind. — Analoge Formeln, die man aus 94) einfach durch cyclische Vertauschung der Buchstaben und Indices erhält, gelten für die an Platten parallel der Z^0X^0- beziehungsweise X^0Y^0-Ebene bei dielektrischer Polarisation parallel Y^0 beziehungsweise Z^0 zu beobachtenden Verzögerungen.

Wenn ausser der Drehung der Symmetrieaxen auch Aenderungen $\delta\omega_x^2$, $\delta\omega_y^2$, $\delta\omega_z^2$ der Quadrate der Hauptlichtgeschwindigkeiten stattfinden, so kommt zu dem Ausdrucke 94) noch ein Glied

$$95) \qquad \Delta'_a = 23{,}8 \frac{L}{\lambda} \frac{n_m^3}{2} (\delta\omega_y^2 \cdot \sin^2\varphi^0 + \delta\omega_z^2 \cos^2\varphi^0 - \delta\omega_x^2)$$

hinzu, welches für die zu beiden Schmalseiten senkrechten Beobachtungsrichtungen den gleichen Werth hat, falls $\varphi^0 = 45^0$ ist, und welches auch für $\varphi^0 = 0$ und $\varphi^0 = 90^0$, d. h. bei Beobachtung in der Richtung der Symmetrieaxen, nicht verschwindet. Solche Aenderungen $\delta\omega_x^2$ etc., welche mit dem Moment a ihr Vorzeichen umkehren würden, sind nach der allgemeinen Theorie nicht möglich und wurden auch nicht beobachtet. Dagegen ergaben die Beobachtungen bei Elektrisirung parallel der X^0-Axe, dass ein derartiges Glied, welches bei Umkehrung der Elektrisirungsrichtung unverändert blieb, thatsächlich vorhanden war; und deshalb sollte hier gleich gezeigt werden, wie sich durch dessen Vor-

handensein die Compensatorbeobachtungen modificiren. Wenn jenes nicht mit dem Momente a das Vorzeichen wechselnde Glied Δ' auftritt, so kann man dennoch Δ' und den durch 94) gegebenen Ausdruck Δ jederzeit getrennt bestimmen, indem man die Compensatorverschiebungen bei zwei entgegengesetzt gleichen Momenten beobachtet; die halbe Differenz derselben ist dann gleich Δ_a, die halbe Summe gleich Δ'_a. Ist $\varphi^0 = 45^0$, so wird man auf der einen schmalen Seitenfläche einer quadratischen Platte beim Moment $+a$ dieselbe Verschiebung beobachten, wie auf der anderen beim Moment $-a$, sodass dann auch die Summe der auf den beiden Seitenpaaren bei gleichem Moment beobachteten Verschiebungen $2\Delta'_a$, und deren Differenz $2\Delta_a$ liefert.

Ausser Compensatorbeobachtungen wurden, namentlich zur anfänglichen Orientirung, auch Beobachtungen im convergenten polarisirten Natriumlicht angestellt, wozu theils derselbe Axenwinkelapparat diente, welcher schon bei den Beobachtungen der Interferenzcurven am Turmalin benutzt wurde, theils auch geeignete Linsen, die bei Anwendung der gewöhnlichen grossen Nicols vor und hinter der Krystallplatte aufgestellt wurden. In letzterem Falle wurde ein Glasmaassstab in der vorderen Brennebene der ersten Linse angebracht, auf den sich dann die Interferenzfigur projicirte.

§ 3. **Elektrooptische Beobachtungen.**

a. Orientirungen und Dimensionen der untersuchten Platten.

Die untersuchten Platten besassen folgende Orientirungen und Dimensionen.

Platten 1, a, b, c: Breitseite parallel der Y^0Z^0-Ebene; Schmalseiten gegen die Y^0- und Z^0-Axe unter $\pm 45^0$ geneigt (abgesehen von Orientirungsfehlern bis zu 1^0, die hier nicht berücksichtigt zu werden brauchen) bei Platte 1a und 1b, unter 41^0 bezw. 49^0 bei Platte 1c. Dimensionen:

	Dicke D	L_{+45}	L_{-45}
1a ursprünglich:	3,47 mm	7,7 mm	7,63 mm
1a später neu abgeschliffen:	3,35	6,35	6,9
1b	2,85	7,4	6,95
1c	2,8	$L_{+41} = 7,1$	$L_{-49} = 6,6$

Hier, wie in den folgenden Tabellen, bezeichnet L_{+45} die Kantenlänge in der Richtung $\varphi^0 = +45^0$, L_{-45} diejenige in der Richtung -45^0.

Platten 2a, b: Breitseite bei Platte 2b parallel der Z^0X^0-Ebene, bei Platte 2a zwar parallel Z^0, aber gegen X^0 um $\delta =$ ca. 12^0 geneigt; Schmalseiten nahezu unter 45^0 gegen die Z^0-Axe geneigt. Dimensionen:

	D	L_{+45}	L_{-45}
2a	2,7 mm	8,55 mm	8,55 mm
2b	4,02	7,1	7,25

Platte 3: Breitseite parallel der X^0Y^0-Ebene, Schmalseiten unter 45° gegen die X^0- und Y^0-Axe geneigt.

Dimensionen: $D = 3{,}2$, $L_{+45} = 7{,}4$, $L_{-45} = 7{,}15$ mm.

Platte 4: Breitseite parallel der Y^0Z^0-Ebene, lange Kanten parallel Y^0 und Z^0.

Dimensionen: $D = 3{,}17$, $L_z = 8{,}50$, $L_y = 8{,}55$ mm.

Platten 5a und b: Breitseite parallel der Z^0X^0-Ebene, lange Kanten parallel Z^0 und X^0. Dimensionen (wobei der Index von L die betreffende Kantenrichtung angiebt):

	D	L_z	L_x
5a	3,55 mm	8,35 mm	8,30 mm
5b	4,0	7,55	7,25

b. Beobachtungen bei Elektrisirung parallel der X^0-Axe.

I. An den Platten 1.

Die ersten Beobachtungen an den Platten 1a und 1b betrafen die Aenderungen der im convergenten homogenen Lichte sichtbaren Interferenzcurven, welche bei dielektrischer Polarisation der zwischen Metallplatten liegenden Platten eintraten. — Die Curven gleichen Gangunterschiedes auf den Schmalseiten dieser Platten sind Hyperbeln, deren (nicht mehr im Gesichtsfelde sichtbarer) Mittelpunkt nach der Seite der Z^0-Axe (2ten Mittellinie) hin verschoben ist; der letztern sind somit die convexen Seiten der sichtbaren Hyperbelbögen zugewandt, und da nach jener Seite hin der Gangunterschied abnimmt, so entspricht eine Verschiebung der Curven nach ihrer convexen Seite hin einer Zunahme des Gangunterschiedes.

Lag die Krystallplatte direct zwischen Metallbelegungen, so waren die bei positiver und negativer Ladung beobachteten Streifenverschiebungen gleich gerichtet, nämlich nach der convexen Seite hin, aber von sehr verschiedener Grösse; und bei gleicher Ladung fand stets gleichzeitig auf dem einen Flächenpaar die grössere, auf dem andern die kleinere Verschiebung statt. Beim Wechsel der Ladung trat jedoch zunächst eine Streifenverschiebung im entgegengesetzten Sinne ein, die aber zum grössten Theil nach der Entladung dauernd zurückblieb. Bei der zweiten oder dritten Ladung erfolgte dann schon wieder eine Verschiebung nach der convexen Seite; bei starker Ladung fand

sogar schon während der ersten Ladung die Umkehrung des Verschiebungssinnes statt. Die erwähnte dauernde Streifenverschiebung trat schon bei sehr schwacher Ladung ein.

Bei rohen Messungen am Ocularmaassstab des Axenwinkelapparates wurde zwischen die eine Metallplatte und den Krystall eine Glimmerplatte zum Schutz gegen Funkenüberspringen gelegt. Dann wurde bei schwacher, der Schlagweite 0,5 der Maassflasche entsprechender Ladung auch eine Verschiebung nach der concaven Seite beobachtet, einmal ganz symmetrisch im Betrage von $\pm\frac{1}{5}$ Streifenabstand, wonach die relative Verzögerung ca. $\frac{1}{5}$ Wellenlänge betrug für die Feldstärke ca. 57 und die Länge 8 mm. Bei stärkerer Ladung war aber die Verschiebung nach der concaven Seite immer zu klein und nahm schon vor der Entladung wieder ab. Ebensolche Beobachtungen an der Platte 1c ergaben folgende bei der Ladung der einen Metallplatte eintretende Streifenverschiebungen, ausgedrückt in Theilen des Streifenabstandes und positiv gerechnet, wenn sie nach der convexen Seite hin erfolgten.

Schlagweite a	Streifenverschiebung.	
1,0	— 0,1 bis + 0,1 und + 0,45	auf dem 1ten Schmalseitenpaar.
0,5	— 0,1 bis 0 „ + 0,15	
1,0	+ 0,1 „ + 0,4	auf dem 2ten „
0,5	— 0,05 „ + 0,15	

Wurde die Platte von beiden Metallbelegungen durch Glimmerplatten isolirt, so trat noch bei Schlagweiten 1,25 bis 1,5 Verschiebung nach der concaven Seite auf; die gesammte Verschiebung war aber kleiner. Das Ladungspotential, bei dem die negative Verschiebung ganz verschwand, schien mit der Zeit zu variiren, wohl in Folge verschiedener Leitungsfähigkeit der Krystalloberfläche.

Die beschriebenen Erscheinungen weisen darauf hin, dass hier eine ihr Vorzeichen nicht umkehrende optische Wirkung der dielektrischen Polarisation, und zwar eine Zunahme der Doppelbrechung vorhanden ist, welche zu der nach der Theorie zu erwartenden, sich mit dem Momente a umkehrenden, hinzukommt.

Die weiterhin angestellten Compensatorbeobachtungen bestätigen dies. So ergaben z. B. Beobachtungen an der Platte 1a, wobei dieselbe direkt zwischen den Metallplatten lag und das Potential mit dem Bifilar-Elektrometer (bei dem $A = 282$, $e^0 = 30{,}7$ war) gemessen wurde, folgende Resultate:

Beobachtungs-Richtung $\varphi^0 = -45^0$.

	Moment a positiv			Moment a negativ			
α	30	20	10	20	15	10	5
V	13,7	11,2	8,0	11,2	9,8	8,0	5,7
Δ	+ 1,58	+ 1,18	+ 0,66	+ 4,70	+ 3,86	+ 2,83	+ 1,69

Hieraus berechnet

$$\frac{\frac{1}{2}(\Delta_+ - \Delta_-)}{V} = -\frac{1{,}76}{11{,}2} = -0{,}157 \text{ bezw.} = -\frac{1{,}08}{8{,}0} = -0{,}135,$$

und im Mittel:

$$\frac{\frac{1}{2}(\Delta_+ - \Delta_-)}{VL} = -0{,}019.$$

Beobachtungsrichtung $\varphi^0 = +45^0$.

	Moment a positiv	Moment a negativ
α	10	10
V	8,0	8,0
Δ	+ 3,5 bis 3,8	+ 0,6 bis + 0,7

$$\frac{\frac{1}{2}(\Delta_+ - \Delta_-)}{V} = +0{,}19, \qquad \frac{\frac{1}{2}(\Delta_+ - \Delta_-)}{VL} = +0{,}0244.$$

Im Mittel aus beiden Werthen:

$$\frac{\frac{1}{2}(\Delta_+ - \Delta_-)}{\frac{\partial V}{\partial n} L \sin 2\varphi^0} = \frac{\Delta_a}{\frac{\partial V}{\partial n} L \sin^2 \varphi^0} = +\mathbf{0{,}00755}.$$

Spätere Beobachtungen, wobei das Potential mittelst des S. 27—29 beschriebenen optischen Elektrometers gemessen wurde, und bei denen die Kraftlinien immer so verliefen, dass a positiv war, ergaben:

	$V = 9{,}5$	$V = 4{,}75$
Beobachtungsrichtung $\varphi^0 = -45^0$	$\Delta = +0{,}92$, später 0,60	+ 0,10 bis 0,15
„ $\varphi^0 = +45^0$	+ 4,50	+ 2,00

Hieraus $\dfrac{\frac{1}{2}(\Delta_{+45} - \Delta_{-45})}{V} = \dfrac{1{,}87}{9{,}5} = 0{,}197$ bezw. $\dfrac{0{,}94}{4{,}75} = 0{,}198$,

$$\frac{\Delta_a}{L \frac{\partial V}{\partial n} \sin 2\varphi^0} = +\mathbf{0{,}00895}.$$

(Für L ist hier ein Mittelwerth genommen, da zunächst so gerechnet war, als ob $L_{+45} = L_{-45}$ sei, in welchem Falle $\Delta_{+45} - \Delta_{-45} = \pm(\Delta_+ - \Delta_-)$ ist.)

In derselben Weise wurde an der Platte 1b (welche dabei in Benzol eingetaucht war, was aber im Fall direct anliegender Metallbelegungen nichts ändert) beobachtet:

$\Delta = +5{,}80$ und $-0{,}55$ für $V = \pm 9{,}5$ auf der einen,
$= -5{,}90$ „ $+0{,}50$ „ „ „ „ „ „ „ andern schmalen Seitenfläche

Hieraus folgt $\dfrac{\Delta_+ - \Delta_-}{2V} = \dfrac{3{,}19}{9{,}5} = 0{,}336$,

$$\frac{\Delta_a}{L \frac{\partial V}{\partial n} \sin 2\varphi^0} = +\frac{0{,}336 \cdot 0{,}285}{7{,}2} = +\mathbf{0{,}0133}.$$

Genaue Messungen bei dieser Anordnung auszuführen, verhinderte der Umstand, dass sich die Nullstellung des Compensators, d. h. die Einstellung für $V = 0$, nach jeder Umkehrung des Vorzeichens der Ladung zunächst sehr bedeutend (um mehrere ganze Umdrehungen) verschob und auch mit der Stärke der Ladung variirte. Der Sinn dieser Nullpunktsverschiebung war derjenige des jedesmal nach der Theorie zu erwartenden $\varDelta$, sodass beispielsweise, wenn man erst bei positiver Ladung positives $\varDelta$ beobachtet hatte, nach Vertauschung der Pole bei der ersten negativen Ladung ein grosses negatives $\varDelta$ einzutreten schien, welches aber bei der Entladung nicht oder nur zum kleineren Theil wieder verschwand. Diese Nullpunktsverschiebung erfolgte bereits bei ganz geringem — einer Schlagweite von kaum $\frac{1}{5}$ mm entsprechendem — Ladungspotential und nahm bei stärkerer Ladung nur noch unerheblich zu. Es scheint, dass sie von einem Eindringen der elektrischen Ladungen der Belegungen in die Krystallplatte herrührte, da sich die Oberfläche der letztern, wenn man sie nach einem Versuch zwischen den Metallplatten herausnahm und mit einem Elektroskop prüfte, mit Elektricität von demselben Vorzeichen geladen erwies, welches die Ladung der anliegenden Metallplatte besessen hatte. Für diese Erklärung spricht ferner der Umstand, dass die Nullpunktsverschiebung nicht mehr auftrat, wenn die Metallbelegungen von der Krystallplatte durch hinreichend dicke Glimmerplatten getrennt wurden; hierdurch wurde zugleich die sich nicht mit der Ladung umkehrende Zunahme der Doppelbrechung $\varDelta'$ auf einen geringen Betrag reducirt, sodass jetzt $\varDelta$ wirklich mit der Ladung das Vorzeichen wechselte, wenn auch der absolute Betrag der negativen Werthe meist noch kleiner war als derjenige der positiven.

Aus diesen Gründen wurden zahlreiche Beobachtungen bei durch Glimmerplatten isolirter Krystallplatte angestellt; allein zu einem sicheren Resultat für den Werth von e_{41} führten auch diese nicht, weil das elektrische Feld in der Krystallplatte in diesem Falle durch oberflächliche, vielleicht auch innere Leitungsfähigkeit der letzteren eine schwer zu beurtheilende Schwächung erlitt. Immerhin mögen einige der so erhaltenen Beobachtungsreihen mitgetheilt werden; die dabei jedesmal in der letzten Zeile enthaltenen Mittelwerthe des für gleiches positives und negatives Potential gebildeten Quotienten $\frac{\varDelta}{V}$ stimmen zufolge S. 166, 167 überein mit den durch den absoluten Werth des Potentials dividirten Werthen des durch Formel 94) gegebenen Ausdruckes $\varDelta_a$ für positives Moment a.

Bei der nachstehenden Beobachtungsreihe an Platte 1a war die letztere in Benzol eingetaucht, um die oberflächliche Leitungsfähigkeit möglichst zu verringern. Es diente hierzu ein kleiner quadratischer Trog mit Wänden aus Spiegelglasplatten und von einer Messingplatte gebildetem Boden, auf welchen die Krystallplatte zwischen den durch Glimmerplatten von ihr getrennten Messingplatten zu liegen kam; der Boden des Troges war zur Erde abgeleitet, die obere Messingplatte, in welche ein vertikaler Draht eingeschraubt war, mit der Batterie und Influenzmaschine verbunden. Die Glimmerplatten waren etwas

grösser als die Messingplatten (nämlich Quadrate von etwa 21 mm Seite) und 0,178 mm dick. Zur Messung von V diente das Bifilar-Elektrometer (mit $A = 282$, $e^0 = 30{,}4$); V ist nachstehend mit demjenigen Vorzeichen angegeben, welches die Ladung derjenigen Fläche, aus welcher die $-X^0$-Axe austrat, besass und welches also zugleich das Vorzeichen des Momentes a war.

Beobachtungsrichtung $\varphi^0 = +45^0$.

V	+ 11,5	− 11,5	+ 15,68	− 15,68	+ 11,26	− 11,26	+ 15,68	− 15,68	+ 21,52	− 21,52
Δ	+ 1,30	− 1,30	+ 1,70	− 1,70	+ 1,10	− 1,00	+ 1,60	− 1,50	+ 2,15	− 2,10
Δ/V	+ 0,112		+ 0,108		+ 0,0932		+ 0,0987		+ 0,0960	

$$\text{Insgesammt: } \frac{\Delta}{LV} = +\mathbf{0{,}0132}.$$

Beobachtungsrichtung $\varphi^0 = -45^0$.

V	+ 11,26	− 11,26	+ 15,7	− 15,7	+ 11,2	− 11,2	+ 15,7	− 15,7	+ 21,55	− 21,55
Δ	− 0,95	+ 1,50	− 1,30	+ 1,85	− 0,95	+ 1,00	− 1,00	+ 1,53	− 1,85	+ 2,05
Δ/V	− 0,109		− 0,100		− 0,0864		− 0,0808		− 0,0903	

$$\text{Insgesammt: } \frac{\Delta}{VL} = -\mathbf{0{,}0122}.$$

Also wird im Mittel:

$$\frac{\Delta_a}{LV\sin 2\varphi^0} = +\mathbf{0{,}0127},$$

und, wenn man die Dielektricitätsconstante des Krystalles bei der Polarisationsrichtung X^0 nach Borel $= 8{,}89$, diejenige des Glimmers $= 6{,}4$ setzt, sodass $\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{V}{0{,}347 + 1{,}39 \cdot 0{,}035} = \frac{V}{0{,}396}$ wird,

$$\frac{\Delta_a}{L \sin 2\varphi^0 \frac{\partial V}{\partial n}} = +\mathbf{0{,}00503}.$$

Eine analoge Beobachtungsreihe, bei der aber die Platte nicht in Benzol eingetaucht war, ergab:

Beobachtungsrichtung $\varphi^0 = +45^0$.

V	+ 15,7	− 15,7	+ 21,5	− 21,5
Δ	+ 1,25	− 1,25	+ 1,83	− 1,77
	+ 1,30	− 1,10	+ 1,95	− 1,70
Δ/V	+ 0,078		+ 0,084	

$$\text{Zusammen } \frac{\Delta}{VL} = \mathbf{0{,}0105}.$$

Beobachtungsrichtung $\varphi^0 = -45^0$.

V	+ 15,7	− 15,7	+ 21,5	− 21,5	+ 11,2	− 11,2
Δ	− 1,20	+ 1,20	− 1,70	+ 1,68	− 0,80	+ 0,85
	− 1,13	+ 1,33	− 1,58	+ 1,88		
Δ / V	− 0,0784		− 0,0794		− 0,0735	

$$\text{Insgesammt } \frac{\Delta}{VL} = -\mathbf{0{,}0101}.$$

Im Mittel aus den Beobachtungen in beiden Richtungen:

$$\frac{\Delta_a}{L \sin 2\varphi^0 \frac{\partial V}{\partial n}} = 0{,}0103 \cdot 0{,}396 = +\mathbf{0{,}00408}.$$

Die geringere Grösse des bei Beobachtungen in Luft erhaltenen Resultates beruht wohl auf der schon erwähnten Schwächung des Potentialgefälles durch oberflächliche Leitung, welche im ersten Falle durch das Eintauchen in Benzol vermindert war.

Eine Beobachtungsreihe an der Platte 1b in Benzol ergab nachstehende Resultate. (Das Potential wurde mit dem optischen Elektrometer gemessen.)

Beobachtungsrichtung $\varphi^0 = +45^0$.

V	+ 9,5	− 9,5	+ 14,3	− 14,3	+ 19,0	− 19,0
Δ	+ 1,10	− 0,92	+ 1,58	− 1,25	+ 2,20	− 1,75
Δ / V	+ 0,106		+ 0,099		+ 0,104	

$$\text{Mittel: } \frac{\Delta}{LV} = +\mathbf{0{,}0139}.$$

Beobachtungsrichtung $\varphi^0 = -45^0$.

V	+ 9,5	− 9,5	+ 14,3	− 14,3	+ 19,0	− 19,0
Δ	− 0,85	+ 0,95	− 1,23	+ 1,45	− 1,55	+ 2,00
Δ / V	− 0,0947		− 0,0937		− 0,0936	

$$\text{Mittel: } \frac{\Delta}{LV} = -\mathbf{0{,}0135}.$$

Hier ist $\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{V}{0{,}285 + 1{,}39 \cdot 0{,}035} = \frac{V}{0{,}334}$, demnach folgt aus beiden Werthen zusammen:

$$\frac{\Delta_a}{L \sin 2\varphi^0 \frac{\partial V}{\partial n}} = +\mathbf{0{,}00457}.$$

Endlich seien noch Beobachtungen an der Platte 1c, die ebenfalls zwischen Glimmerplatten in Benzol lag, angeführt. Beobachtet wurde parallel den längeren Kanten, das ist in der Richtung $\varphi^0 = -41^0$:

V	$\pm 19{,}0$		$\pm 14{,}3$		$\pm 9{,}5$	
Δ	$+2{,}00$	$-1{,}53$	$+1{,}50$	$-1{,}10$	$+0{,}95$	$-0{,}80$
Δ/V	0,093		0,091		0,092	

$$\text{Mittel: } \frac{\Delta}{VL} = \mathbf{0{,}0130},$$

$$\frac{\Delta_a}{L \sin 2\varphi^0 \dfrac{\partial V}{\partial n}} = \frac{0{,}0130 \cdot 0{,}33}{0{,}99} = +\mathbf{0{,}00434}.$$

Aus den Beobachtungen an allen Platten 1) mit zwischengelegten Glimmerplatten in Benzol ergiebt sich also schliesslich für diese Grösse der Werth

$$\tfrac{1}{3}(\mathbf{0{,}00503} + \mathbf{0{,}00457} + \mathbf{0{,}00434}) = +\mathbf{0{,}00465},$$

dagegen folgen aus denjenigen ohne Glimmerplattten die viel grösseren Werthe:

$$+\mathbf{0{,}00755}, \quad \mathbf{0{,}00895}, \quad \mathbf{0{,}0133},$$

welche letzteren aber, wie schon oben bemerkt wurde, wegen der Nullpunktsverschiebung sehr unsicher sind.

Nehmen wir den Werth $+0{,}0047$ an, so ist nach Formel 94)

$$+0{,}0047 = \frac{23{,}8}{2\lambda}\left(-n_1^{0^3} \frac{e_{41}\varkappa}{v^2} + (n_2^0 - n_1^0)\,\delta_{14}\right).$$

Der Werth von δ_{14} liess sich, wie wir bei Erörterung der piëzoelektrischen Versuche sehen werden, ebenfalls nur sehr unsicher bestimmen, sodass sich nur seine Grössenordnung angeben lässt. Nehmen wir den grössten der gefundenen Werthe: $+1180 \cdot 10^{-8}$, so wird, da $n_2^0 - n_1^0 = n_x^0 - \frac{1}{2}(n_y^0 + n_z^0) = +0{,}0044$ ist, $(n_2^0 - n_1^0)\,\delta_{14} = +5{,}2 \cdot 10^{-8}$ und giebt zu $\dfrac{2\lambda \cdot 0{,}0047}{23{,}8} = 23{,}3 \cdot 10^{-8}$ eine relativ grosse Correction; mit dem unteren Grenzwerth von δ_{14}: $+340 \cdot 10^{-8}$ gerechnet, wird die letztere $+1{,}5 \cdot 10^{-8}$. Durchschnittlich kann diese Correction also auf $3 \cdot 10^{-8}$ geschätzt werden, wodurch man erhält:

$$\frac{\boldsymbol{e_{41}\varkappa_1}}{\boldsymbol{v^2}} = -\frac{20{,}3 \cdot 10^{-8}}{3{,}33} = \mathbf{-6 \cdot 10^{-8}},$$

und nach Einsetzung des S. 162 angegebenen Werthes von $\varkappa_1$:

$$\boldsymbol{e_{41}} = \mathbf{-9{,}6 \cdot 10^{-8}}\,\boldsymbol{v^2}.$$

Dieser Werth ist nach dem oben Gesagten wahrscheinlich (absolut genommen) noch erheblich zu klein; die obere Grenze, welche sich aus den Beobachtungen, bei denen die Metallplatten dem Krystall direct anlagen, ergeben würde, ist für $\dfrac{e_{41}\varkappa_1}{v^2}$ etwa $\mathbf{-17 \cdot 10^{-8}}$.

Mit Sicherheit lässt sich also für die elektrooptische Constante $\frac{e_{41}\varkappa_1}{v^2}$ nur das Vorzeichen und die Grössenordnung angeben. Ihre Grösse ist mindestens die 10fache, wahrscheinlich sogar die 20- bis 30fache von derjenigen der elektrooptischen Constanten $\frac{e_{41}\varkappa_1}{v^2}$ des Natriumchlorates und $\frac{e_{11}\varkappa_1}{v^2}$ des Quarzes, sodass das Seignettesalz bei Elektrisirung parallel der krystallographischen Axe a jedenfalls einen weit stärkeren, sich mit der Kraftlinienrichtung umkehrenden elektrooptischen Effect zeigt, als Natriumchlorat und Quarz.

II. Beobachtungen an der Platte 4.

Um die sich nicht mit dem Vorzeichen der Elektrisirung umkehrende optische Wirkung, deren Vorhandensein aus den Beobachtungen an den Platten 1) hervorging, näher zu untersuchen, war die Platte 4) hergestellt worden. Denn an dieser musste auf den Schmalseiten, d. h. bei Beobachtung parallel Y^0 und Z^0, jene Wirkung allein übrig bleiben, da für $\varphi^0 = 0$ und $\varphi^0 = 90^0$ nach Formel 94) der von der Drehung der Symmetrieaxen herrührende Gangunterschied verschwindet. In der That zeigte sich schon bei qualitativen Beobachtungen im convergenten Licht eine starke optische Wirkung der dielektrischen Polarisation, und zwar, wie zu erwarten, sowohl bei positivem als bei negativem Moment eine Zunahme der Doppelbrechung auf beiden Schmalseiten. Es werden also die (positiven) Differenzen $\omega_z^{0^2} - \omega_x^{0^2}$ und $\omega_y^{0^2} - \omega_x^{0^2}$ durch dielektrische Polarisation beide vergrössert. Beobachtungen mit dem Compensator bestätigten dieses Resultat, führten aber nicht zu übereinstimmenden absoluten Werthen. Auch ergab sich, dass die relative Verzögerung nicht, wie man erwarten sollte, proportional mit V^2, sondern langsamer wuchs, wenn auch schneller als der absolute Werth von V selbst. Folgende Beobachtungsresultate z. B. lassen dies deutlich erkennen. Die Zahlen $\varDelta$ sind darin das arithmetische Mittel aus den sehr nahe übereinstimmenden Werthen, welche bei gleicher positiver und negativer Ladung beobachtet wurden, und der Index von $\varDelta$ giebt die Beobachtungsrichtung an; die Potentiale entsprachen den Ausschlägen $\alpha = 5$, 10, 20, 30 des Bifilar-Elektrometers.

V	$\pm$ 5,7	$\pm$ 8,0	$\pm$ 11,3	$\pm$ 13,7
V^2	35,6	71,0	140	207
$\varDelta_y$	+ 1,55	2,50	3,20	4,30
$\varDelta_z$	+ 1,95	3,20	4,45	5,40

Die Verzögerung ist also in der Richtung der Y^0-Axe etwas kleiner als in der Richtung der Z^0-Axe, und dasselbe Verhältniss gilt für die Aenderungen $\delta(\omega_x^2 - \omega_z^2)$, $\delta(\omega_x^2 - \omega_y^2)$, da die Kantenlängen $\parallel Y$ und $\parallel Z$ bei der Platte 4) gleich sind und Dickenänderungen in diesen Richtungen durch die dielektrische Polarisation nicht verursacht werden. Da somit $\delta(\omega_x^2 - \omega_y^2)$ und $\delta(\omega_x^2 - \omega_z^2)$ relativ wenig von einander

verschieden sind, so muss $\delta(\omega_y^2 - \omega_z^2)$ klein gegen diese beiden Grössen sein, und folglich $\parallel X^0$, d. h. in der Richtung der Kraftlinien nur eine viel geringere Gangunterschiedsänderung auftreten. In der That war eine solche gar nicht wahrnehmbar, als die Platte, analog wie früher die Natriumchlorat-Platten, in einem mit Benzol gefüllten Glastrog so aufgestellt wurde, dass man die Interferenzcurven auf ihren Breitseiten beobachten konnte, während die Kraftlinien senkrecht zu letzteren verliefen. Allerdings war bei dieser Anordnung auch die Feldstärke geringer, als bei der früheren. —

Der, wie man sieht, sehr erhebliche Betrag der Aenderungen Δ_y und Δ_z wurde sehr stark herabgemindert, wenn Glimmerplatten zwischen die Krystallplatte und die Metallbelegungen eingeschaltet wurden; beispielsweise wurde dann für das Potential ± 19, dem hier etwa dasselbe Potentialgefälle entspricht, wie dem Potential 16,5 bei direct anliegenden Metallplatten, beobachtet

$$\Delta_y = 0{,}50 \qquad \Delta_z = 0{,}58.$$

Dieser Umstand könnte auf die Vermuthung führen, dass die fragliche Zunahme der Doppelbrechung mit der innern Leitungsfähigkeit zusammenhinge, welche das Seignettesalz wahrscheinlich (und vielleicht besonders stark in der Richtung X^0), besitzt. Die nächstliegende Annahme, daß ihr Grund die Erwärmung der Platte durch den hindurchgehenden elektrischen Strom sei, ist aber jedenfalls nicht zutreffend; denn eine Erwärmung bewirkt im Seignettesalz zwar in der That eine starke Aenderung der Doppelbrechung, aber derart, dass der Gangunterschied in der Richtung der Y^0- und Z^0-Axe abnimmt, wie die S. 162 angeführten Resultate von Müttrich betreffs der Aenderungen von $n_x - n_z$ und $n_x - n_y$ zeigen. Gegen die Erklärung durch eine Wärmewirkung spricht übrigens auch die Exactheit, mit welcher die beobachtete optische Aenderung beim Entladen der Batterie wieder verschwand (— der Nullpunkt war selbst nach sehr starker Aenderung Δ wieder der frühere —), sowie der Umstand, dass sie merklich constant blieb, wenn die Potentialdifferenz längere Zeit constant gehalten wurde; die etwa entwickelte Joule'sche Wärme hingegen würde einerseits nach der Entladung nur allmählich verschwinden und andererseits mit der Ladungsdauer wachsen. — Zweitens könnte man als Ursache der fraglichen optischen Wirkung eine sehr starke nicht umkehrbare Deformation des Krystalles im elektrischen Felde vermuthen. Die gewöhnliche, d. h. aus den Maxwell'schen Spannungen zu berechnende Elektrostriction kann nur optische Aenderungen von viel niedrigerer Grössenordnung, als die hier beobachteten, hervorrufen, wie eine analoge Berechnung, wie sie für Quarz in § 2c ausgeführt wurde, ergiebt. Man müsste demnach annehmen, dass diejenigen Elektrostrictionswirkungen, welche das reciproke Phänomen zur Aenderung der Dielektricitätconstanten durch Deformationen sind[1]), beim Seignettesalz eine ausserordentliche Grösse erreichten. Eine rohe

1) Vergl. F. Pockels, Gruners Archiv für Math. u. Phys. **12**, 92—94. 1893, wo diese Wirkungen als „Spannungen 2ter Art“ bezeichnet sind.

Berechnung lehrt, dass die Grössen, welche die Aenderungen der Dielektricitätsconstanten durch Deformationen bestimmen, die Grössenordnung 50000 erreichen müssten, so dass sich der Werth der Dielektricitätsconstante beispielsweise durch die lineare Dilatation $^1/_{70000}$ schon um etwa $^1/_{10}$ seines Betrages ändern würde. Eine so ausserordentlich starke Veränderlichkeit der dielektrischen Eigenschaften ist aber doch in hohem Grade unwahrscheinlich.

Eine Erklärung jenes merkwürdigen nicht umkehrbaren elektrooptischen Effectes vermag ich demnach vorläufig nicht zu geben. Es sei nur noch darauf hingewiesen, dass dessen Grösse diejenige des von Kerr in dielektrischen Flüssigkeiten und angeblich auch in Glas beobachteten analogen Effectes bei Weitem übertrifft.

b. Kraftlinien parallel der Y^0-Axe.

I. Beobachtungen an der Platte 2b.

Auf den Schmalseiten dieser Platte, also in den Richtungen, welche die Winkel zwischen Z^0 und X^0 halbiren, war ebenfalls eine starke Aenderung des Gangunterschiedes bei dielektrischer Polarisation zu beobachten, welche aber beim Zeichenwechsel der letzteren nahezu vollständig in die entgegengesetzte überging. Auch eine bleibende Verschiebung des Nullpunktes nach Aenderung des Vorzeichens der Ladung, wie sie bei den Platten 1) vorhanden war, wenn sie direct zwischen Metallplatten lagen, trat hier nicht auf, sondern höchstens langsame Nullpunktsverschiebungen infolge von Temperaturänderungen, welche auf die Doppelbrechung des Seignettesalzes starken Einfluss haben. — Dementsprechend wurden die Beobachtungen alle in der Weise angestellt, dass die Krystallplatte direct zwischen den Metallplatten lag und zwar in Benzol eingetaucht, theils der besseren Isolation wegen, theils um auch schräg durch die Platte hindurchsehen zu können. Die Compensatorstreifen erschienen hier je nach der Lage der Platte entweder verwaschen und auseinandergerückt, oder scharf, aber eng gedrängt, da sich der Gangunterschied mit der Neigung der Wellennormalen gegen die (den optischen Axen benachbarten) Normalen der Schmalseiten sehr schnell ändert. Aus diesem Grunde wurden die Einstellungen ziemlich ungenau und schien es wünschenswerth, noch in anderen, unter bekannten Winkeln gegen jene Normalen geneigten Richtungen zu beobachten. Dies wurde nun in der Weise ausgeführt, dass der auf der Mitte eines drehbaren Tischchens aufgestellte Trog sammt der darin liegenden Platte, deren Schmalseiten den Seitenwänden des Troges parallel gerichtet waren, um einen bestimmten Winkel ψ aus der ursprünglichen Lage, d. h. derjenigen, wo eine Seitenfläche zur Beobachtungsrichtung senkrecht war, herausgedreht wurde. Dann bildeten die zur Beobachtung gelangenden Wellennormalen im Krystall mit den anfangs der Beobachtungsrichtung parallelen Kanten einen Winkel ψ^0, welcher $= \arcsin\left(\frac{1}{n_y^0}\sin\psi\right)$ gesetzt werden kann, und der in der Formel 94), bezw. der daraus durch Vertauschung von Y mit Z, Z mit X, e_{41} mit e_{52} er-

haltenen Formel, mit φ^0 bezeichnete Winkel ist $= \pm 45^0 \pm \arcsin\left(\frac{1}{n_y^0}\sin\psi\right)$ je nach dem Sinne der Drehung ψ. Ausserdem ist zu berücksichtigen, dass die Länge des Weges im Krystall im Verhältniss $\frac{1}{\cos\psi^0}$ vergrössert ist. Bei den Beobachtungen wurde $\psi = \pm 30^0$ gewählt; dann ergiebt sich $\psi^0 = 19^0 30'$ und $\varphi^0 = \pm 25^0 30'$ bezw. $\pm 64^0 30'$, und der mit $\frac{\cos 19^0 30'}{\sin 51^0}$ multiplicirte in der Richtung $\psi = 30^0$ beobachtete Gangunterschied muss gleich dem für $\varphi^0 = 45^0$ oder $\psi = 0^0$, d. h. bei senkrechter Durchsicht beobachteten sein.

In der folgenden Zusammenstellung der Beobachtungsresultate ist in der Ueberschrift angegeben, ob die Beobachtungsrichtung im Quadranten $(+Z^0, +X^0)$ oder $(+Z^0, -X^0)$ lag; $\Delta_{\pm 45}$ bedeutet den in der oben erwähnten Weise auf die Richtung $\varphi^0 = \pm 45^0$ reducirten Gangunterschied. Dem mit dem optischen Elektrometer gemessenen Potential ist das Vorzeichen des Momentes b beigelegt.

Beobachtungsrichtung zwischen $+Z^0$, $+X^0$.

$\psi = 0$

V	—18,4	+17,8	—19,0	+18,1	—18,3	+19,0	—18,3	+19,0	—19,0
Δ	—1,10	+0,80	—1,14	+0,90	—1,04	+1,10	—1,14	+1,20	—1,20
$\frac{\Delta}{V}$	+0,0549			+0,0532		+0,0600		+0,0631	

Mittel: $\frac{\Delta_{+45}}{V} = +0,0578.$

	$\psi = +30^0$				$\psi = -30^0$			
V	—18,7	+18,5	+18,9	—18,5	+18,3	—18,2	+17,1	—19,0
Δ	—1,00	+1,00	+0,95	—0,86	+0,86	—0,95	+0,90	—1,00
$\frac{\Delta}{V}$	+0,0538		+0,0485		+0,0498		+0,0525	

Hieraus berechnet: $\frac{\Delta_{+45}}{V} = 0,0512 \cdot \frac{0,94}{0,777} = +0,062.$

Insgesammt: $\frac{\Delta_{+45}}{LV} = +\mathbf{0,00845}.$

Beobachtungsrichtung zwischen $+Z^0$, $-X^0$.

$\psi = 0$

V	+18,8	—19,0	—19,0	+19,0	+18,5	—19,0	+18,5	—18,7	+18,2	—18,2
Δ	—1,15	+1,17	+1,00	—1,05	—1,00	+1,00	—1,05	+1,10	—1,15	+1,10
$\frac{V}{\Delta}$	—0,0614		—0,0540		—0,0532		—0,0578		—0,0617	

Mittel: $\frac{\Delta_{-45}}{V} = -0,0576.$

	$\psi = \pm 30^0$		$\psi = -30^0$		$\psi = +30^0$	
V	−18,1	+17,1	−19,0	+19,0	+19,0	−18,1
$\varDelta$	−0,85	+0,83	+0,95	−1,00	−1,00	+0,95
$\frac{\varDelta}{V}$	−0,0477		−0,0513		−0,0539	

$$\text{Hieraus: } \frac{\varDelta_{-45}}{V} = -0{,}0617.$$

$$\text{Insgesammt: } \frac{\varDelta_{-45}}{LV} = -\mathbf{0{,}00825}.$$

Es bestätigt sich somit nahezu, dass $\varDelta_{+45}$ und $\varDelta_{-45}$ entgegengesetzt gleich sind, und man erhält im Mittel $\frac{\varDelta_b}{LV\sin 2\varphi^0} = +\mathbf{0{,}00835}$. Bei der Berechnung von e_{52} braucht hier die Dickenänderung nicht berücksichtigt zu werden, weil der gesammte Gangunterschied für die hier in Betracht kommenden Fortpflanzungsrichtungen überhaupt nur gering ist, und ausserdem δ_{25} einen viel kleineren Werth hat, als δ_{14}.

Die zu 94) analoge Gleichung ergiebt demnach, da hier $\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{V}{D} = \frac{V}{0{,}402}$ war,

$$\frac{e_{52}\varkappa_2}{v^2} = -\frac{\varDelta_b \cdot D}{23{,}8 \cdot LV\sin 2\varphi^0} \cdot \frac{2\lambda}{n_y^{0^3}} = -\mathbf{4{,}98 \cdot 10^{-8}}.$$

II. Beobachtungen an den Platten 5.

Bei gerader Durchsicht durch die Schmalseiten dieser Platten, also in der Richtung der X^0- oder Z^0-Axe, wurde gar keine oder (in letzterer Richtung) eine nur sehr geringe elektrooptische Wirkung beobachtet, die ihren Sinn nicht mit dem Vorzeichen von V umkehrte und ebenfalls in einer Zunahme der Doppelbrechung bestand. Dieselbe war, selbst wenn die Platte direct zwischen Metallplatten lag, so gering ($\varDelta = -0{,}20$ für $V = 19$), dass kaum mit Sicherheit behauptet werden kann, ob sie wirklich von der dielektrischen Polarisation parallel der Y^0-Axe herrührte; denn es könnte z. B. infolge eines kleinen Orientirungsfehlers eine geringe X-Componente des Momentes vorhanden gewesen sein, welche, wie wir sahen, stark optisch wirksam ist, und zwar in dem Sinne der hier beobachteten Aenderung. Eine Temperaturerhöhung hingegen hätte auch hier wieder entgegengesetzten Einfluss haben müssen. Sobald die Platten etwas seitlich gedreht wurden, sodass die Beobachtungsrichtung von der X^0- resp. Z^0-Axe abwich, wurde natürlich die normale optische Wirkung des Momentes b, welche an der Platte 2 untersucht worden ist, sichtbar, und demgemäss konnten auch die Platten 5 bei schiefer Durchsicht zur Ermittelung der Constante e_{52} dienen. Die Anordnung hierfür war ganz dieselbe, wie die unter I beschriebene bei der Platte 2. Die Berechnung von $\varDelta_{45}$ aus dem beobachteten $\varDelta$ ist aber etwas verschieden. Bezeichnet man wieder mit ψ den Drehungswinkel aus der Normallage der Platte, in welcher jetzt die Z^0- oder X^0-Axe die

Beobachtungsrichtung war, so ist $\varphi^0 = \pm \arcsin\left(\frac{1}{n_m}\sin\psi\right)$, und die Weglänge im Krystall $= \frac{L}{\cos\varphi^0}$, folglich

$$\Delta_{+45} = \frac{\pm\Delta}{2\sin\varphi^0} = \frac{\pm\Delta\cdot n_m}{2\sin\psi},$$

wobei n_m einen mittleren Brechungsindex, etwa $\frac{1}{2}(n_x^0+n_y^0)$ bezw. $\frac{1}{2}(n_y^0+n_z^0)$, bezeichnet und das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem ψ von X^0 oder Z^0 aus gerechnet ist. Gleichen Drehungen nach links und rechts $\pm\psi$ entsprechen hier also nach der Theorie entgegengesetzte Werthe Δ, dagegen der Drehung $-\psi$ von X^0 aus derselbe Werth wie der Drehung $+\psi$ von Z^0 aus (gleiche Kantenlänge $\parallel X^0$ und $\parallel Z^0$ vorausgesetzt, was bei der Platte 5a zutrifft).

Beobachtungen an Platte 5a.

Auf der zu X^0 senkrechten Schmalseite.

ψ	-18^0		$+18^0$		$+30^0$		-30^0	
V	−19	+19	+19	−19	−19	+19	+19	−19
Δ	+0,55	−0,60	+0,62	−0,62	−1,07	+1,11	−1,03	+1,05
$\frac{\Delta}{V}$	−0,0303		+0,0326		+0,0573		−0,0547	
$\frac{\Delta_{+45}}{V}$	**+0,0761**				**+0,0837.**			

Auf der zu Z^0 senkrechten Schmalseite.

ψ	-30^0		$+30^0$			
V	−19,4	+19	+19	−18,7	+9,5	−9,5
Δ	−1,12	+1,02	−1,05	+1,03	−0,54	+0,53
$\frac{\Delta}{V}$	+0,0558		−0,0557			

$$\frac{\Delta_{+45}}{V} = +\mathbf{0,0833}.$$

Aus den drei Bestimmungen dieser Grösse zusammengenommen folgt $\frac{\Delta_{+45}}{LV} = +0,00974$ und

$$\frac{e_{52}\varkappa_2}{v^2} = -\frac{2\lambda\cdot 0,355}{3,34}\cdot\frac{0,00974}{23,8} = -\mathbf{5,12\cdot 10^{-8}}.$$

Beobachtungen an Platte 5b.

Auf der zu X^0 senkrechten Schmalseite.

ψ	-20^0		$+20^0$		-30^0		$+30^0$	
V	−19	+19	+18,4	−18,8	+18,6	−18,8	+19	−18,8
Δ	+0,58	−0,58	+0,545	−0,56	−0,80	+0,785	+0,79	−0,78
$\frac{\Delta}{V}$	−0,0304		+0,0297		−0,0424		+0,0415	
$\frac{\Delta_{+45}}{VL}$	**+0,00896**				**+0,00863.**			

Auf der zu Z^0 senkrechten Schmalseite.

ψ	-20^0		$+20^0$		-30^0		$+30^0$	
V	$-18,4$	$+19$	$-18,4$	$+18,6$	$-18,2$	$+18,6$	$-18,6$	$+18,6$
Δ	$-0,60$	$+0,55$	$+0,54$	$-0,53$	$-0,80$	$+0,75$	$+0,80$	$-0,78$
$\frac{\Delta}{V}$	$+0,0307$		$-0,0289$		$+0,0420$		$-0,0424$	
$\frac{\Delta_{+45}}{VL}$	$+0,00860$				$+0,00834$.			

Insgesammt ergiebt dies: $\frac{\Delta_{+45}}{LV} = +0,00863$,

$$\frac{e_{52}\varkappa_2}{v^2} = -\frac{2\lambda \cdot 0,40}{3,34} \cdot \frac{0,00863}{23,8} = -\mathbf{5,11 \cdot 10^{-8}}.$$

Es wurde somit gefunden

an Platte	2b	5a	5b
$\frac{e_{52}\varkappa_2}{v^2} \cdot 10^{-8} =$	$-4,98$	$-5,12$	$-5,11$,

sodass als definitiver Werth anzunehmen ist:

$$\frac{e_{52}\varkappa_2}{v^2} = -\mathbf{5,07 \cdot 10^{-8}}.$$

Bei Benutzung des von Borel ermittelten Werthes $\varkappa_2 = 0,47$ wird hiernach

$$e_{52} = -\mathbf{10,8 \cdot 10^{-8} \cdot v^2}.$$

Wie aus dem Vorhergehenden hervorgeht, ist dieses Resultat bei Weitem zuverlässiger, als dasjenige für e_{41}.

c. *Kraftlinien parallel der Z^0-Axe.*

Hier stand nur die Platte No. 3 zur Verfügung, deren lange Kanten den Halbirungslinien der Winkel zwischen der X^0- und Y^0-Axe parallel waren. Bei Beobachtung auf den Schmalseiten dieser Platte im convergenten Licht war eine Verschiebung der nahezu geradlinig und senkrecht zur Plattenebene verlaufenden Curven gleichen Gangunterschiedes bei Wechsel des Potentialgefälles nicht sicher erkennbar; doch hätte hierdurch auch nur eine starke Aenderung des Gangunterschiedes bemerkt werden können, da jene Interferenzstreifen ziemlich eng aneinander gedrängt waren. Mit dem Compensator wurden, während die Platte, in Benzol eingetaucht, direct zwischen Metallplatten lag, folgende relative Verzögerungen gemessen.

Beobachtungsrichtung $\varphi^0 = +45^0$.

V	$+19,0$	$-19,0$
Δ	$-$ 0,35	$+$ 0,20 bis 0,30

$$\frac{\Delta}{V} = -0{,}0158, \qquad \frac{\Delta}{LV} = -0{,}00214.$$

Beobachtungsrichtung $\varphi^0 = -45^0$.

V	$+18,6$	$-19,0$
Δ	$+$ 0,25 bis 0,30	$-$ 0,25 bis 0,30

$$\frac{\Delta}{V} = +0{,}0145, \qquad \frac{\Delta}{LV} = +0{,}00203.$$

Aus beiden Werthen zusammen folgt

$$\frac{\Delta_e}{LV\sin 2\varphi^0} = \mathbf{-0{,}00209}, \qquad \frac{\Delta_e}{L\frac{\partial V}{\partial n}\sin 2\varphi_0} = \mathbf{-0{,}000668},$$

also nach der nach Analogie von 94) gebildeten Gleichung:

$$-\frac{e_{63}\varkappa_3}{v^2} = \frac{n_1^0-n_2^0}{n_1^3}\delta_{36} - \frac{2\lambda}{23{,}8\cdot n_1^3}\cdot 0{,}000668.$$

Hier ist $n_2^0 = n_z^0 = 1{,}49145$, $n_1^0 = \frac{1}{2}(n_x^0 + n_y^0) = 1{,}4950$; ferner ergaben die in § 4 mitzutheilenden piëzoelektrischen Messungen $\delta_{36} = +35{,}4\cdot 10^{-8}$; folglich wird $(n_1^0-n_2^0)\delta_{36} = +0{,}13\cdot 10^{-8}$ und $-\frac{e_{63}\varkappa_3}{v^2} = +\frac{0{,}13-3{,}31}{3{,}36}\cdot 10^{-8}$,

$$\frac{e_{63}\varkappa_3}{v^2} = \mathbf{+0{,}946\cdot 10^{-8}}.$$

Dieser Werth ist wegen seiner Kleinheit, und weil er aus wenigen Messungen abgeleitet ist, verhältnissmässig unsicherer, als derjenige von $\frac{e_{52}\varkappa_2}{v^2}$, (vielleicht nur bis auf 10% genau). — Nach Einsetzung von $\varkappa_3 = 0{,}45$ (vergl. S. 162) wird

$$e_{63} = \mathbf{+2{,}08\cdot 10^{-8}v^2}.$$

Ob eine sich nicht mit dem Elektrisirungssinne umkehrende elektrooptische Wirkung der Polarisation nach Z^0 vorhanden ist, liess sich nicht mit Sicherheit feststellen; wenn sie existirt, so ist sie jedenfalls noch geringer als die im Falle der Polarisation $\parallel Y^0$ beobachtete, und auch hier könnte es sich dann um eine Spur der durch Polarisation parallel X^0 hervorgerufenen Wirkung handeln, die infolge geringer Orientirungsfehler oder Störungen des Kraftlinienverlaufs auftreten konnte. —

§ 4. **Piëzoelektrische Beobachtungen.**

Dem Ansatz 88) zufolge findet piëzoelektrische Erregung beim Seignettesalz nur statt durch „schiebende" Drucke Y_z, Z_x, X_y, und zwar ist das erregte Moment dann parallel beziehungsweise der X^0-, Y^0-, Z^0-Axe. Die günstigste Versuchsanordnung wird also, gerade wie beim Natriumchlorat, darin bestehen, dass man einen einseitigen Druck p in den Richtungen ausübt, welche die Winkel zwischen je zwei der krystallographischen Symmetrieaxen X^0, Y^0, Z^0 halbiren; dann ist nur je eine der Grössen Y_z, Z_x, X_y von 0 verschieden, nämlich $= \pm \frac{1}{2} p$, und folglich das erregte Moment senkrecht zu der betreffenden Coordinatenebene und von der Grösse $\mp \frac{1}{2} p \, \delta_{hk}$; es ist z. B. $a = -\frac{1}{2} \delta_{14} p$, wenn die Richtung des Druckes p den Winkel $(+Y^0, +Z^0)$ halbirt, dagegen gleich $+\frac{1}{2} \delta_{14} p$, wenn dieselbe den Winkel $(-Y^0, +Z^0)$ halbirt. Zu diesen Beobachtungen waren demnach die Platten der Gattungen 1), 2), 3) zu verwenden, indem sie parallel ihren längeren Kanten comprimirt und auf den Breitseiten mit Metallbelegungen versehen wurden, deren eine mit der Erde und deren andere mit dem Quadrantelektrometer verbunden wurde. Die Versuchsanordnung war im Wesentlichen dieselbe, wie früher beim $NaClO_3$ und Quarz; nur folgende kleine Abänderungen sind zu erwähnen. Die Belegungen wurden wegen der Empfindlichkeit der Krystallsubstanz nicht wie früher mit Schellack aufgekittet, sondern mit einer Spur Klebwachs; sie bestanden aus rechteckigen Stückchen von dünnem Kupferblech oder dickem Stanniol, die zum Theil etwas kleiner waren als die betreffende Plattenfläche, weshalb ihr Flächeninhalt q' in diesen Fällen unten mit angegeben werden wird. Ist q der gepresste Querschnitt der Platte, P die Belastungsänderung, und haben φ_0, Φ die frühere Bedeutung, so ist das in Clarks gemessene Potential, zu welchem die auf der Flächeneinheit der Plattenbelegung durch die Druckeinheit entwickelte Elektricitätsmenge das Elektrometer lud: $\mu = \frac{\varphi_0}{\Phi} \frac{q}{Pq'}$. Diese Grösse ist am Schluss jeder Beobachtungsreihe angegeben und zwar mit dem Vorzeichen der durch Belastung auf derjenigen Fläche, aus welcher die positive X^0- bezw. Y^0- oder Z^0-Axe austritt, entwickelten Ladung.

Die Bestimmung von φ^0 gestaltete sich insofern anders wie früher, als bei einem Theil der Platten (Gattung 1)) der Ausschlag erst einige Zeit nach der Belastungsänderung seinen Maximalwerth erreichte und dann je nach der Güte der Isolation entweder constant blieb oder langsam wieder sank. Im ersteren Fall ist der constante Grenzwerth, im letzteren der Maximalwerth für φ^0 genommen. In solchen Fällen, wo bereits während der beobachteten 5 ersten Schwingungen ein Zurückgehen der Ruhelage eintrat, welches aber immer sehr gering war, wurde φ^0 nach dem beim Quarz erörterten Verfahren berechnet. Schliesslich sei bemerkt, dass die Ladung der Elektrometernadel bei der Untersuchung der Platten 1) und 2), (wie die kleinen Werthe von Φ zeigen), viel kleiner gemacht war, als früher, weil die piëzoelektrische Erregung hier weit stärker war.

a. Beobachtungen an den Platten 1).

Die Platten 1) zeigten auch hier wieder ein ganz anomales Verhalten, darin bestehend, dass sie, wenn sie belastet waren, dauernd, oder wenigstens sehr lange Zeit hindurch, Elektricität entwickelten, sodass der erste beim Belasten momentan auftretende Ausschlag allmählich immer weiter wuchs und erst nach Stunden wieder abnahm. Stand die Platte frei, so zeigte sie diese Elektricitätsentwickelung nicht; daher erhielt man auch beim Entlasten constant bleibende oder wieder sinkende Ausschläge. Aus diesem Grunde wurde an den Platten 1) stets nur beim Entlasten beobachtet, in der Weise nämlich, dass die Ableitung der vorher belasteten Platte zur Erde erst unmittelbar vor der Entlastung unterbrochen wurde. Die Entlastungsausschläge waren nun zwar bei derselben Beobachtungsreihe befriedigend constant, differirten aber bei den verschiedenen Platten und auch bei verschiedener Aufstellung derselben Platte ganz ausserordentlich, wie die unten folgenden Tabellen zeigen werden. Zum Theil erklärt sich dies vielleicht dadurch, dass nur geringe Belastungen angewandt werden konnten und somit, da ausserdem die schmalen Seitenflächen der Platten mehr oder weniger gerundet waren, die Compression wahrscheinlich ziemlich ungleichmässig ausfiel. Um den Druck besser auszugleichen, wurden bei einigen Beobachtungen als Zwischenlagen zwischen die Hartgummiplatten und die Krystallplatte Gummiplatten benutzt, wodurch aber die ganze Aufstellung instabil wurde. In anderen Fällen waren die dicken Hartgummiplatten muldenförmig ausgehöhlt und biegsame Hartgummilamellen darübergelegt, welche sich den schwach convexen Krystallflächen besser anschmiegen konnten. Trotz dieser Maassregeln blieben aber grosse Differenzen der bei verschiedenen Beobachtungsreihen erhaltenen Werthe von δ_{14} bestehen, sodass diese Constante überhaupt nicht sicher bestimmt werden konnte.

Die Bezeichnungsweise in den nachstehenden Tabellen ist im Uebrigen der beim Quarz gebrauchten analog; („$+X^0$ zum El.“ bedeutet also, dass diejenige Plattenfläche, deren äussere Normale die $+X^0$-Axe ist, mit dem Elektrometer verbunden war).

Platte 1a, zwischen Hartgummiplatten.

Positiver Ausschlag bei positiver Ladung.

$q' = 47{,}75$ mm² im Mittel, $2\Phi = 20{,}8$, $P = 115{,}1$ g.

Druckrichtung —45°.

	$-X^0$ zum El.				$+X^0$ zum El.			
φ_0	+27,6	25,9	25,8	26,4	—24,9	25,0	24,5	24,0
	+26,4				—24,6			

$$\frac{\varphi_0}{\Phi} = 2{,}45, \qquad \mu = +0{,}01187.$$

Druckrichtung $+45^{0}$.

	$+X^{0}$ zum El.				$-X^{0}$ zum El.			
φ_0	+23,5	23,9	24,0	23,7	—23,9	22,8	23,5	23,6
	+23,8				—23,45			

$$\frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 2{,}27, \qquad \mu = -\mathbf{0{,}0109}.$$

Desgleichen zwischen Gummiplatten.

Positiver Ausschlag bei negativer Ladung.

$P = 50{,}2$. $2\Phi = 94{,}2$. q' wie vorher.

Druckrichtung -45^{0}.

	$+X^{0}$ zum El.					$-X^{0}$ zum El.			
φ_0	+47,5	46,2	46,5	50,4	44,9	—48,2	47,6	48,0	46,8
	+47,1					—47,65			

$$\frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 1{,}006, \qquad \mu = +\mathbf{0{,}0112}.$$

Druckrichtnng $+45^{0}$.

	$-X^{0}$ zum El.						$+X^{0}$ zum El.				
φ_0	+42,8	42,6	41,6	41,5;	45,6	46,3	—41,9	41,6;	46,0	45,5	44,8
	+44,0						—43,6				

$$\frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}930, \qquad \mu = -\mathbf{0{,}01024}.$$

Platte 1a nach dem Abschleifen[1]).

Zwischen dünnen Hartgummiplatten.

$q' = 36{,}7\ \mathrm{mm}^2$ im Mittel. $P = 115$ g. $2\Phi = 28{,}0$.

Druckrichtung $+45^{0}$.

	$+X^{0}$ zum El.				$-X^{0}$ zum El.			
φ_0	—36,0	35,3	37,2	36,3	+36,3	40,0	39,0	40,0
	—36,2				+38,8			

$$\frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 2{,}68, \qquad \mu = -\mathbf{0{,}0146}.$$

1) Ursprünglich waren die Ecken dieser Platte zum Theil etwas ausgesprungen gewesen.

Druckrichtung -45^0.

φ_0	$-44,0$	$44,5$	$+45,7$	$44,7$	$45,8$
	$-44,3$		$+45,4$		

$$\frac{\overline{\varphi_0}}{\Phi} = 3,20, \qquad \mu = +0,0161.$$

Spätere Beobachtungen, wobei positiver Ausschlag positiver Ladung entsprach und die Belegungen die volle Grösse der Flächen besassen:

$$q' = 43,7\,\text{mm}^2. \quad 2\Phi = 56,0.$$

Zwischen Hartgummiplatten.

Druckrichtung -45^0. $P = 115$.

	$+X^0$ zum El.					$-X^0$ zum El.				
φ_0	$-51,1$	$48,5$	$49,5$	$51,3$	$52,5$	$+50,7$	$47,0$	$50,2$	$52,8$	$53,2$
	$-50,6$					$+50,8$				

$$\frac{\overline{\varphi_0}}{\Phi} = 1,81, \qquad \mu = +0,00765.$$

Druckrichtung $+45^0$. $P = 50,2$.

	$+X^0$ zum El.		$-X^0$ zum El.		
φ_0	$+28,3$	$27,5$	$-27,7$	$25,5$	$26,4$
	$+27,9$		$-26,5$		

$$\frac{\overline{\varphi_0}}{\Phi} = 0,97, \qquad \mu = -0,0094.$$

Desgleichen, aber zwischen Gummiplatten mit $P = 50,2$.
(Isolation schlechter, namentlich anfangs; Elektricitätsverlust bei der Berechnung berücksichtigt, dabei Dämpfungsconstante $\beta = 0,67$.)

Druckrichtung -45^0.

	$-X^0$ zum El.			$+X^0$ zum El.		
φ_0	$+51,4$	$50,3$	$50,6$	$-54,4$	$54,4$	$52,2$
	$+50,8$			$-53,7$		

$$\frac{\overline{\varphi_0}}{\Phi} = 1,86, \qquad \mu = +0,0180.$$

Druckrichtung $+45^0$.

	$+X^0$ zum El.					$-X^0$ zum El.				
φ_0	$+46,7$	$41,6$	$42,5$	$46,3$	$47,0$	$-47,7$	$46,5$	$42,3$	$47,8$	$46,3$
	$+44,8$					$-46,1$				

$$\frac{\overline{\varphi_0}}{\Phi} = 1,63, \qquad \mu = -0,0171.$$

Platte 1b, zwischen Hartgummiplatten.

$q' = 43{,}75.\quad P = 115.\quad 2\Phi = 14{,}4.$

Druckrichtung $+45^0$.

	$+X^0$ zum El.				$-X^0$ zum El.			
φ_0	+15,2	15,3	15,2	15,5	—15,2	14,7	15,0	14,4
	+ 15,3				— 14,8			

$\frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 2{,}10, \qquad \mu = -\mathbf{0{,}0083}.$

Druckrichtung -45^0.

	$+X^0$ zum El.				$-X^0$ zum El.					
φ_0	—14,5	—14,5;	—14,4	—14,5	+15,9	15,7;	14,2	15,6	14,9	14,8
	—14,5				+15,2					

$\frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 2{,}08, \qquad \mu = +\mathbf{0{,}0087}.$

Platte 1c, zwischen Gummiplatten.

(Ziemlich schlechte Isolation; φ_0 berechnet wie bei $NaClO_3$, mit Dämpfungsconstante $\beta = 0{,}64$.)

$q' = 47{,}0\ mm^2.\quad P = 50{,}2.\quad 2\Phi = 56{,}0.$

Druckrichtung $+41^0$.

	$+X^0$ zum El.					$-X^0$ zum El.					
φ_0	+21,6	22,3	22,8	22,7	22,7	—22,7	22,7	22,2	22,8	22,9	22,3
	+ 22,4					— 22,6					

$\frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}81, \qquad \mu = -0{,}0063,$

reducirt auf die Druckrichtung $+45^0$: $\frac{0{,}0063}{\sin 82^0} = -\mathbf{0{,}0064}.$

Druckrichtung -49^0.

	$+X^0$ zum El.		$-X^0$ zum El.		
φ_0	—16,4	—17,4	+17,9	17,4	17,8
	— 16,9		+ 17,7		

$\frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}62, \qquad \mu = +0{,}00517,$

reducirt auf die Druckrichtung -45^0: $+\mathbf{0{,}0052}.$

Desgleichen, zwischen dünnen Hartgummiplatten.

$q' = 44\,\text{mm}^2. \quad P = 115. \quad 2\Phi = 29{,}6.$

Druckrichtung —49°.

	$+X^0$ zum El.							$-X^0$ zum El.						
φ_0	−24,5	23,7	24,0	27,7	25	29	30	+26	25	25,5	24,5	24,2	27,3	26,2
	−26,0							+25,6						

$$\frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 1{,}74, \qquad \mu = +0{,}0068,$$

reducirt auf die Druckrichtung -45^0: $+\mathbf{0{,}0069}$.

Druckrichtung +41°.

	$+X^0$ zum El.				$-X^0$ zum El.				
φ_0	+33,0	32,9	32,8	33,7	−30,9	33,2	32,5	33,5	32,4
	+33,1				−32,5				

$$\frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 2{,}21, \qquad \mu = -0{,}0081,$$

reducirt auf die Druckrichtung $+45^0$: $-\mathbf{0{,}0082}$.

Nachstehend sind noch einmal alle an den drei Platten 1) bei den Druckrichtungen $+45^0$ und -45^0 erhaltenen Werthe von $\mu \cdot 10^3$ zusammengestellt.

	Platte 1a.					Platte 1b.	Platte 1c.	
$\mu_{+45} \cdot 10^3$	−10,9	−10,24	−14,6	−9,4	−17,1	−8,3	−6,4	−8,2
$\mu_{-45} \cdot 10^3$	+11,9	+11,2	+16,1	+7,7	+18,0	+8,7	+5,2	+6,9

Daraus ist ersichtlich, dass zwar die für beide Druckrichtungen gefundenen absoluten Werthe meist ziemlich gleich sind, aber an verschiedenen Beobachtungstagen und für die verschiedenen Platten sehr stark differirende Zahlen erhalten wurden, deren Extreme dem absoluten Werth nach sind $5{,}2 \cdot 10^{-3}$ und $18{,}0 \cdot 10^{-3}$. Der Werth von rund $\mathbf{10 \cdot 10^{-3}}$ würde etwa das Mittel sein, doch sind die grösseren Werthe vielleicht noch richtiger, da Fehlerquellen, die den Ausschlag vergrössern würden, kaum anzunehmen sind. —

Um aus μ die Constante δ_{14} zu berechnen, muss man die Capacität C des Elektrometers nebst der Krystallplattenbelegung und den Verbindungsdrähten kennen. Da seit den Beobachtungen am Quarz am Apparat nichts geändert war, so kann der dort bestimmte Werth $C_0 = 66{,}2$ für das Elektrometer nebst Verbindungsdrähten auch hier mit genügender Annäherung als richtig angenommen werden. Die Capacität der Seignettesalzplatten kann durchschnittlich unter Annahme der Dielektricitätsconstante 7 gleich $\frac{0{,}5 \cdot 7}{4\pi \cdot 0{,}35} = 0{,}8$ gesetzt

werden, sodass $C = 67$ wird. Ferner hat man, um das Moment in absolutem Maass zu erhalten, mit $\frac{0{,}478}{9{,}81} \cdot 10^{-4}$ zu multipliciren. Nach der Theorie ist dann

$$\delta_{14} = -2\mu_{+45} C \frac{0{,}478}{9{,}81} \cdot 10^{-4} = +2\mu_{-45} C \frac{0{,}478}{9{,}81} \cdot 10^{-4}.$$

Man findet aus den oben angegebenen Werthen μ hiernach für δ_{14} positive Werthe zwischen den Grenzen

$$+\mathbf{340} \cdot \mathbf{10^{-8}} \text{ und } +\mathbf{1180} \cdot \mathbf{10^{-8}}.$$

Obschon der absolute Werth von δ_{14} also in weiten Grenzen unbestimmt bleibt, so ist doch das Vorzeichen sicher und die Grössenordnung auch insoweit, dass man sagen kann, dass diese piëzoelektrische Constante des Seignettesalzes diejenigen des Quarzes und Natriumchlorates (und Turmalins) um etwa das Hundertfache übertrifft, dass also das Seignettesalz (bei Druckkräften Y_z) eine ungleich grössere piëzoelektrische Erregbarkeit besitzt, als die übrigen bisher in dieser Hinsicht untersuchten Krystalle.

Für die bereits zu Anfang (S. 184) erwähnte dauernde Elektricitätsentwicklung, welche die Platten 1) zeigen, während sie belastet sind, vermag ich bisher keine andere Erklärung zu finden, als die folgende. Durch die Deformation wird im Innern des Krystalles eine gewisse elektrische Kraft E hervorgerufen, welche das (durch $-\delta_{14} Y_z$ gegebene) Moment a inducirt, also $= \frac{+a}{\varkappa_1}$ ist. Die infolge dieser Polarisation a auf den Belegungen der Plattenoberflächen frei werdenden Elektricitätsmengen $\pm q' a$ laden diese Belegungen zu einer gewissen Potentialdifferenz V, welche im Inneren der Krystallplatte eine der elektrischen Kraft E entgegengerichtete Kraft $\frac{V}{D}$ erzeugt; diese Potentialdifferenz ist aber, wenn die eine Belegung mit der Erde und die andere mit der grossen Capacität des Quadrantelektrometers verbunden ist, sehr gering, sodass $\frac{V}{D}$ viel kleiner ist als $\frac{a}{\varkappa_1}$, und der grösste Theil dieser elektrischen Kraft uncompensirt bleibt. Besitzt nun der Krystall in der Richtung der X^0-Axe innere Leitungsfähigkeit, so wird diese übrig bleibende elektrische Kraft fortgesetzt einen Strom erzeugen, bis so viel Elektricität durch die Platte hindurchgetrieben ist, dass das Potential auf der mit dem Quadrantelektrometer verbundenen Belegung hoch genug gestiegen ist, um die in der Platte wirkende elektromotorische Kraft, welche gleichzeitig infolge der Leitung etwas unter ihren Anfangswerth $\frac{a}{\varkappa_1}$ gesunken ist, gerade zu compensiren. Demnach würde sich das nach Belastung der Platte lange andauernde Steigen des Elektrometerausschlages erklären, wenn man dem Seignettesalz eine, wenn auch äusserst geringe, Leitungsfähigkeit in

der Richtung der krystallographischen Axe a zuschreibt. Mit dieser Annahme, deren Richtigkeit allerdings erst durch besondere Versuche an besseren Präparaten geprüft werden müsste[1]), würde auch das bei den elektrooptischen Beobachtungen an den Platten 1) bemerkte Eindringen der Ladung in den Krystall übereinstimmen, und es wäre nicht unwahrscheinlich, dass auch die S. 169 und 175—76 besprochene merkwürdige sich nicht umkehrende elektrooptische Wirkung eines Feldes, dessen Kraftlinien zur X^0-Axe parallel sind, mit jener Leitungsfähigkeit zusammenhinge.

b. Beobachtungen an den Platten 2a und 2b.

Hier trat keine nach der Belastung fortdauernde Elektricitätsentwicklung auf, sodass auch der Ausschlag bei der Belastung beobachtet werden konnte. Auch erreichte hier der aus den Umkehrpunkten in bekannter Weise berechnete Ausschlag sein Maximum sofort nach der Belastung oder Entlastung und nahm dann allmählich ab, jedoch meist so langsam, dass die Abnahme während der ersten 5 Schwingungen als gleichförmig angesehen, also φ_0 analog wie beim Quarz berechnet werden konnte.

Platte 2a.

Dieselbe besass nicht genau die beabsichtigte Orientirung; ihre Normale lag zwar nahezu in der $X^0\,Y^0$-Ebene, wich aber von der Y^0-Axe um einen Winkel δ von etwa 12^0 im positiven Drehungssinne ab, wie im Axenwinkelapparat constatirt wurde. Daher war die Druckrichtung, wenn die Platte auf den Schmalseiten gepresst wurde, nicht genau die Halbirungslinie eines der Winkel zwischen der Z^0- und X^0-Axe, sondern besass nachstehende Richtungscosinus:

	X^0	Y^0	Z^0
auf dem 1. Schmalseitenpaar	$\sqrt{\frac{1}{2}}\cos\delta$	$\sqrt{\frac{1}{2}}\sin\delta$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
„ „ 2. „	$-\sqrt{\frac{1}{2}}\cos\delta$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}\sin\delta$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$

Die erstere Richtung soll in der Zusammenstellung der Beobachtungen aber wie im Falle richtiger Orientirung mit $+45^0$, die zweite mit -45^0 bezeichnet werden.

Für die erste Druckrichtung wird

$$Z_x = \tfrac{1}{2}\,p\cdot\cos\delta, \qquad Y_z = \tfrac{1}{2}\,p\cdot\sin\delta,$$

für die zweite

$$Z_x = -\tfrac{1}{2}p\cdot\cos\delta, \qquad Y_z = -\tfrac{1}{2}p\cdot\sin\delta.$$

1) Es sei vorläufig darauf hingewiesen, dass gerade für die Richtung der a-Axe die Bestimmung der Dielekricititätsconstante durch Hrn. Borel einen auffallend grossen Werth ergab (cf. S. 162).

Es tritt daher auch ein Moment nach der X^0-Axe auf:

$$a = -\tfrac{1}{2}\delta_{14} p \cdot \sin\delta \text{ im ersten Falle,}$$
$$a = +\tfrac{1}{2}\delta_{14} p \cdot \sin\delta \text{ „ zweiten „ ,}$$

und das zur Beobachtung gelangende Moment nach der Plattennormale hat den Werth

$$b\cos\delta - a\sin\delta = \mp\tfrac{1}{2}(\delta_{25}\cos^2\delta - \delta_{14}\sin^2\delta)p,$$

sodass man aus den Beobachtungen an dieser Platte nicht direkt δ_{25}, sondern $\delta_{25}\cos^2 12^0 - \delta_{14}\sin^2 12^0$ findet.

Es war bei diesen Beobachtungen $q' = 57$ mm² (unter Berücksichtigung der abgebrochenen Ecken der Platte, welche etwa 4 mm² ausmachten), $P = 115$ und $2\Phi = 18{,}0$; positiver Ausschlag entsprach positiver Ladung, wie auch bei den Beobachtungen an den Platten 2b) und 3).

Druckrichtung — 45°.

	$-Y^0$ zum El.				$+Y^0$ zum El.			
	B	*E*	*B*	*E*	*B*	*E*	*B*	*E*
1. Aufstellung.	+ 6,7	— 6,5	+ 6,4	— 6,6	— 6,7	+ 6,7	— 6,6	+ 6,6
2. „	+ 6,5	— 6,8	+ 6,9	— 6,8	— 6,6	+ 6,7	— 6,6	+ 6,7
	$\overline{\varphi}_0 = 6{,}65$				$\overline{\varphi}_0 = 6{,}65$			

$$\frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}738, \quad \mu = -\mathbf{2{,}61 \cdot 10^{-3}}.$$

Druckrichtung + 45°.

	$+Y^0$ zum El.				$-Y^0$ zum El.			
	B	*E*	*B*	*E*	*B*	*E*	*B*	*E*
1. Aufstellung.	+ 6,8	— 6,6	+ 6,4	— 6,7	— 6,5	+ 6,5	— 6,2	+ 6,4
2. „	+ 6,4	— 6,4	+ 6,5	— 6,4	— 6,3	+ 6,5	— 6,5	+ 6,3
	$\overline{\varphi}_0 = 6{,}525$				$\overline{\varphi}_0 = 6{,}40$			

$$\frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}718, \quad \mu = +\mathbf{2{,}53 \cdot 10^{-3}}.$$

Aus beiden Werthen μ zusammen folgt

$$\delta_{25}\cos^2\delta - \delta_{14}\sin^2\delta = -5{,}13 \cdot 10^{-3}$$

oder wenn man $\delta = 12^0$ und nach S. 188 $\delta_{14} = +20 \cdot 10^{-3}$ annimmt (in relativem Maasse ausgedrückt):

$$\delta_{25} = \frac{-5{,}13 + 0{,}042 \cdot 20}{0{,}96} \cdot 10^{-3} = -\mathbf{4{,}46 \cdot 10^{-3}}.$$

Platte 2b.

$q' = 49\,\mathrm{mm}^2. \quad P = 115.$

Druckrichtung -45^0. $2\Phi = 170{,}8$.

	$-Y^0$ zum El.				$+Y^0$ zum El.			
B	+42,5	42,5	42,8	42,5	—43,7	43,5	43,3	43,4
E	—42,6	42,9	42,4	42,8	+43,3	43,15	43,1	43,2
	$\overline{\varphi}_0 = 42{,}63$				$\overline{\varphi}_0 = 43{,}34$			

$$\frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}503, \qquad \mu = -\mathbf{2{,}55 \cdot 10^{-3}}.$$

Druckrichtung $+45^0$.

Erste Aufstellung. $2\Phi = 170{,}2$.

	$-Y^0$ zum El.				$+Y^0$ zum El.			
B	—40,7	40,7	40,7	40,4	+43,3	43,2	43,4	43,6
E	+40,0	40,3	40,0	40,5	—43,3	43,5	43,8	43,1
	$\overline{\varphi}_0 = 40{,}4$				$\overline{\varphi}_0 = 43{,}4$			

$$\frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}492.$$

Zweite Aufstellung. $2\Phi = 172{,}6$.

	$-Y^0$ zum El.				$+Y^0$ zum El.			
B	—39,8	39,8	40,5	40,2	+40,8	40,5	40,4	40,5
E	+40,0	40,1	40,3	40,3	—40,8	41,0	40,9	41,1
	$\overline{\varphi}_0 = 40{,}15$				$\overline{\varphi}_0 = 40{,}75$			

$$\frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}468.$$

Mittel aus den beiden letzten Beobachtungsreihen:

$$\frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}480, \qquad \mu = +\mathbf{2{,}48 \cdot 10^{-3}}.$$

Insgesammt folgt aus den Beobachtungen an Platte 2b:

$$\delta_{25} \text{ in relativem Maass} = -(2{,}55 + 2{,}48) \cdot 10^{-3} = -5{,}03 \cdot 10^{-3},$$

und daraus der definitive Werth in absolutem Maass:

$$\delta_{25} = -\mathbf{165 \cdot 10^{-8}}.$$

Die Messungen an der Platte 2a ergeben den etwas kleineren Werth $-\mathbf{146 \cdot 10^{-8}}$, welcher aber wegen der ungenauen Orientirung und abgebrochenen Ecken der Platte weniger zuverlässig ist und deshalb nicht mit berücksichtigt werden soll.

Auch die zweite piëzoelektrische Constante des Seignettesalzes besitzt also

einen sehr hohen absoluten Betrag; ihr Vorzeichen ist entgegengesetzt wie das der ersten.

c. Beobachtungen an Platte 3.

Auch hier verliefen die Versuche durchaus regelmässig und war die Bestimmung der Constante δ_{36} mit ganz befriedigender Genauigkeit möglich, wie folgende Tabelle der beobachteten Ausschläge $\overline{\varphi}_0$ zeigt.

$$q' = 53. \quad P = 115. \quad 2\Phi = 172{,}4.$$

Druckrichtung -45^0 (d. h. Halbirungslinie des Winkels (X^0, $-Y^0$)).

	$+Z^0$ zum El.				$-Z^0$ zum El.			
B.	+11,2	11,4	11,5	11,5	−12,2	12,0	11,9	12,2
E.	−11,0	11,2	11,3	11,2	+12,1	11,9	11,9	11,7
	$\overline{\varphi}_0 = 11{,}25$				$\overline{\varphi}_0 = 12{,}0$			

$$\frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}135, \quad \mu = +\mathbf{0{,}555 \cdot 10^{-3}}.$$

Druckrichtung $+45^0$.

	$+Z^0$ zum El.				$-Z^0$ zum El.			
B.	−10,5	10,3	10,4	10,2	+10,7	10,7	10,8	11,0
E.	+10,3	10,3	10,4	10,4	−11,2	11,2	11,1	11,0
	$\overline{\varphi}^0 = 10{,}35$				$\overline{\varphi}_0 = 10{,}96$			

$$\frac{\overline{\varphi}_0}{\Phi} = 0{,}1235, \quad \mu = -\mathbf{0{,}526 \cdot 10^{-3}}.$$

Daraus folgt in absolutem Maass:

$$\delta_{36} = +0{,}540 \cdot 2 \cdot \frac{67 \cdot 0{,}478}{9{,}81} \cdot 10^{-7},$$

$$\delta_{36} = +\mathbf{35{,}4 \cdot 10^{-8}}.$$

Die piëzoelektrischen Constanten des Seignettesalzes, wie sie vorstehend bestimmt worden sind, erscheinen nicht nur wegen ihrer ausserordentlichen absoluten Grösse bemerkenswerth, sondern auch dadurch, dass sie verschiedene Vorzeichen besitzen, nämlich δ_{14} und δ_{36} positives, δ_{25} negatives. Dies hat u. A. zur Folge, dass es keine Richtung giebt, für welche das durch einseitigen Druck erregte Moment in die Druckrichtung fällt — wie es bei tetraëdrischen oder tetartoëdrischen Krystallen des regulären Systems immer für die Octaëdernormalen eintritt. Da nämlich das durch einen in der Richtung α, β, γ wirkenden Druck erregte Moment Richtungscosinus besitzt, die sich verhalten wie $\beta\gamma\delta_{14} : \gamma\alpha\delta_{25} : \alpha\beta\delta_{36}$, so ist klar, dass im Falle

verschiedener Vorzeichen der δ_{hk} das erregte Gesammt-Moment stets in einem anderen Octanten liegt, wie die Druckrichtung.

§ 5. Piëzooptische Beobachtungen.

a. Theorie.

Um die Relationen 91) prüfen zu können, kommt es darauf an, die piëzooptischen Constanten a_{44}, a_{55}, a_{66} zu ermitteln, das sind diejenigen, welche die durch Deformationen y_z, z_x, x_y verursachten Aenderungen des optischen Verhaltens (— nämlich Drehungen der optischen Symmetrieaxen —) bestimmen. Da es nun nicht ausführbar ist, durch mechanische Einwirkung diese Deformationen allein hervorzubringen — man müsste zu diesem Zweck nur schiebende Kräfte Y_z, Z_x, X_y wirken lassen —, so können auch die Constanten a_{44}, a_{55}, a_{66} (bezw. deren Producte mit den Elasticitätsmoduln s_{44}, s_{55}, s_{66}) nicht direct aus je einer Beobachtung bestimmt werden. Man muss vielmehr durch Beobachtung der relativen Verzögerung bei verschiedenen Druckrichtungen und Fortpflanzungsrichtungen solche Combinationen der verschiedenen a_{hk} ermitteln, aus welchen sich a_{44}, a_{55}, a_{66} berechnen lassen. Drei verschiedene Combinationen, in denen je eine der gesuchten Constanten vorkommt, erhält man offenbar, wenn man den einseitigen Druck parallel den Halbirungslinien der Winkel zwischen je zwei krystallographischen Symmetrieaxen ausübt und jedesmal in derselben Symmetrieebene senkrecht zur Druckrichtung den erzeugten Gangunterschied misst; dann ist nämlich je eine der Grössen B_{23}, B_{31}, B_{12} von 0 verschieden und es findet eine durch das entsprechende a_{hh} gemessene Drehung der optischen Symmetrieaxen um die X^0- bezw. Y^0- oder Z^0-Axe statt, welche in der angegebenen Beobachtungsrichtung einen (ihr proportionalen) Gangunterschied erzeugt. Zu diesen Beobachtungen sind die früher mit 1), 2) und 3) bezeichneten Platten verwendbar, indem jedesmal auf ein Schmalseitenpaar der Druck ausgeübt und auf dem anderen der Gangunterschied mit dem Compensator gemessen wird. Da hierbei aber auch Deformationen x_x, y_y, z_z auftreten, so sind weitere Beobachtungen nöthig, um den Einfluss der letzteren auf die in den erstgenannten Fällen beobachteten Gangunterschiede eliminiren zu können. Hierzu sind nun Beobachtungen an den Platten 4) und 5) ausreichend, bei denen der Druck in der Richtung einer der längeren Kanten, das ist parallel X^0, Y^0, oder Z^0, ausgeübt und dabei der Gangunterschied jedesmal auf beiden zur Druckrichtung parallelen Flächenpaaren gemessen wird. Es sollen im Folgenden zunächst die theoretischen Ausdrücke für den Gangunterschied in diesen verschiedenen Fällen aus dem Ansatz 90) abgeleitet werden, wobei ausserdem die Formeln der Elasticitätstheorie für rhombische Krystalle:

$$\begin{aligned} x_x &= -(s_{11} X_x + s_{12} Y_y + s_{13} Z_z), \\ y_y &= -(s_{12} X_x + s_{22} Y_y + s_{23} Z_z), \\ z_z &= -(s_{13} X_x + s_{23} Y_y + s_{33} Z_z), \end{aligned}$$

$$y_z = -s_{44} Y_z,$$
$$z_x = -s_{55} Z_x,$$
$$x_y = -s_{66} X_y,$$

zu benutzen sind.

Liegt erstens die Druckrichtung in der $Y^0 Z^0$-Ebene, den Winkel $(+Y^0, +Z^0)$ halbirend, so ist $X_x = X_y = Z_x = 0$, $Y_y = Z_z = Y_z = \frac{1}{2}p$, folglich

$$B_{11} - \omega_x^{0^2} = -\frac{p}{2}\{a_{11}(s_{12}+s_{13}) + a_{12}(s_{22}+s_{23}) + a_{13}(s_{23}+s_{33})\},$$

$$B_{22} - \omega_y^{0^2} = -\frac{p}{2}\{a_{21}(s_{12}+s_{13}) + a_{22}(s_{22}+s_{23}) + a_{23}(s_{23}+s_{33})\},$$

$$B_{33} - \omega_z^{0^2} = -\frac{p}{2}\{a_{31}(s_{12}+s_{13}) + a_{32}(s_{22}+s_{23}) + a_{33}(s_{23}+s_{33})\},$$

$$B_{23} = -\frac{p}{2} a_{44} s_{44}, \qquad B_{31} = B_{12} = 0.$$

Die Quadrate der Hauptlichtgeschwindigkeiten für die zur Druckrichtung senkrechte Richtung in der $Y^0 Z^0$-Ebene besitzen, da der Schnitt durch das Ovaloid senkrecht zu dieser Richtung die Gleichung hat:

$$\varrho^2 = \left(B_{11} - \frac{B_{22}+B_{33}}{2}\right)\cos^2(\varrho, x) + \frac{B_{22}+B_{33}}{2} + B_{23}\sin^2(\varrho, x),$$

die Werthe

$$\omega_1^2 = B_{11}, \qquad \omega_2^2 = \frac{B_{22}+B_{33}}{2} + B_{23},$$

von denen der erste für die parallel zur Druckrichtung, der zweite für die senkrecht dazu (also parallel X^0) polarisirte Welle gilt. Der durch den Druck erzeugte Gangunterschied in Wellenlängen wird demnach, wenn L die Plattendicke in der Beobachtungsrichtung und n_m ein mittlerer Brechungsindex ist,

96)
$$\begin{aligned}\overline{\varDelta}_1 &= \frac{L}{\lambda}\frac{n_m^3}{2}\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2 - (\omega_2^{0^2} - \omega_1^{0^2})}{v^2} \\ &= +\frac{L n_m^3}{2\lambda v^2}\frac{p}{2}\left\{\left(a_{11} - \frac{a_{21}+a_{31}}{2}\right)(s_{12}+s_{13}) + \left(a_{12} - \frac{a_{22}+a_{32}}{2}\right)(s_{22}+s_{23})\right. \\ &\qquad \left. + \left(a_{13} - \frac{a_{23}+a_{33}}{2}\right)(s_{23}+s_{33}) - a_{44}s_{44}\right\}.\end{aligned}$$

Bei obiger Berechnung von $\overline{\varDelta}_1$ ist die Dickenänderung der Platte in der Beobachtungsrichtung vernachlässigt, was wegen der geringen Stärke der Doppelbrechung beim Seignettesalz zulässig erscheint. Um sie zu berechnen, fehlte hier überdies die Kenntniss der Elasticitätsconstanten; aber es lässt sich abschätzen, (indem man z. B. die Querdilatation durchschnittlich gleich der des

Steinsalzes annimmt, welche nahezu den grössten bisher bekannten Werth hat), dass die durch sie bewirkte Aenderung des Gangunterschiedes die Beobachtungsfehler (welche hier relativ sehr gross waren) gewiss nicht übersteigt. Dasselbe gilt für die übrigen Druck- und Beobachtungsrichtungen.

Wirkt der Druck parallel der Halbirungslinie des Winkels $(-Y^0, Z^0)$, und beobachtet man in der hierzu senkrechten in der Y^0Z^0-Ebene liegenden Richtung, welche vorher die Druckrichtung war, so bleibt der Ausdruck für $\overline{\Delta}_1$, da nur B_{23} sein Vorzeichen wechselt, dafür aber auch $\omega_2^2 = \frac{B_{22}+B_{33}}{2} - B_{23}$ wird, ungeändert. Es ist dies auch natürlich, weil die Coordinatenebenen sowohl für das optische als für das elastische Verhalten Symmetrieebenen sind trotz der sphenoidischen Hemiëdrie.

Für die Beobachtungen auf den Schmalseiten der Platten 2) und 3), wo die Druckrichtung einen der Winkel zwischen Z^0 und X^0 bezw. X^0 und Y^0 halbirt, erhält man den Ausdruck für $\overline{\Delta}$ aus $\overline{\Delta}_1$ einfach durch cyclische Vertauschung der Indices. Es wird also für die Platten 2):

97)
$$\overline{\Delta}_2 = \frac{L n_m^3 p}{4\lambda v^2}\Big\{\Big(a_{22} - \frac{a_{12}+a_{32}}{2}\Big)(s_{23}+s_{12}) + \Big(a_{23} - \frac{a_{33}+a_{13}}{2}\Big)(s_{33}+s_{13}) + \Big(a_{21} - \frac{a_{31}+a_{11}}{2}\Big)(s_{13}+s_{11}) - a_{55}\, s_{55}\Big\}$$

und für Platte 3):

98)
$$\overline{\Delta}_3 = \frac{L n_m^3 p}{4\lambda v^2}\Big\{\Big(a_{33} - \frac{a_{23}+a_{13}}{2}\Big)(s_{13}+s_{23}) + \Big(a_{31} - \frac{a_{11}+a_{21}}{2}\Big)(s_{11}+s_{12}) + \Big(a_{32} - \frac{a_{12}+a_{22}}{2}\Big)(s_{12}+s_{22}) - a_{66}\, s_{66}\Big\}.$$

Für n_m kann überall mit hinreichender Annäherung derselbe mittlere Werth, etwa n_y^0, gesetzt werden, ebenso im Folgenden. —

Für den Druck p parallel der X^0-Axe ergiebt sich:

$$B_{11} - \omega_x^{0^2} = -p\{a_{11}s_{11} + a_{12}s_{12} + a_{13}s_{13}\},$$
$$B_{22} - \omega_y^{0^2} = -p\{a_{21}s_{11} + a_{22}s_{12} + a_{23}s_{13}\},$$
$$B_{33} - \omega_z^{0^2} = -p\{a_{31}s_{11} + a_{32}s_{12} + a_{33}s_{13}\}.$$

B_{23}, B_{31}, B_{12} sind $=0$, und daher $\sqrt{B_{11}}$, $\sqrt{B_{22}}$, $\sqrt{B_{33}}$ direct die neuen Werthe der Hauptlichtgeschwindigkeiten.

Behalten ω_1 und ω_2 die frühere Bedeutung, so wird daher

für die Richtung Y^0: $\omega_2^2 - \omega_1^2 - (\omega_2^{0^2} - \omega_1^{0^2}) = B_{11} - B_{33} - (\omega_x^{0^2} - \omega_z^{0^2})$,

„ „ „ Z^0: $\omega_2^2 - \omega_1^2 - (\omega_2^{0^2} - \omega_1^{0^2}) = B_{11} - B_{22} - (\omega_x^{0^2} - \omega_y^{0^2})$,

und die in diesen Richtungen beobachteten Gangunterschiede, welche mit zwei Indices bezeichnet werden sollen, deren erster die Druckrichtung und deren zweiter die Beobachtungsrichtung angiebt, werden durch folgende Ausdrücke dargestellt:

$$\overline{\varDelta}_{12} = \frac{L n_m^3 p}{2\lambda v^2}\left\{(a_{31}-a_{11})s_{11}+(a_{32}-a_{12})s_{12}+(a_{33}-a_{13})s_{13}\right\}, \tag{99}$$

$$\overline{\varDelta}_{13} = \frac{L n_m^3 p}{2\lambda v^2}\left\{(a_{21}-a_{11})s_{11}+(a_{22}-a_{12})s_{12}+(a_{23}-a_{13})s_{13}\right\}. \tag{100}$$

Ganz analog ergiebt sich für die Druckrichtung Y^0 und Beobachtungsrichtung Z^0 bezw. X^0:

$$\overline{\varDelta}_{23} = \frac{L n_m^3 p}{2\lambda v^2}\left\{(a_{11}-a_{21})s_{12}+(a_{12}-a_{22})s_{22}+(a_{13}-a_{23})s_{23}\right\}, \tag{101}$$

$$\overline{\varDelta}_{21} = \frac{L n_m^3 p}{2\lambda v^2}\left\{(a_{31}-a_{21})s_{12}+(a_{32}-a_{22})s_{22}+(a_{33}-a_{23})s_{23}\right\}, \tag{102}$$

und für die Druckrichtung Z^0 und Beobachtungsrichtung X^0 bezw. Y^0:

$$\overline{\varDelta}_{31} = \frac{L n_m^3 p}{2\lambda v^2}\left\{(a_{21}-a_{31})s_{13}+(a_{22}-a_{32})s_{23}+(a_{23}-a_{33})s_{33}\right\}, \tag{103}$$

$$\overline{\varDelta}_{32} = \frac{L n_m^3 p}{2\lambda v^2}\left\{(a_{11}-a_{31})s_{13}+(a_{12}-a_{32})s_{23}+(a_{13}-a_{33})s_{33}\right\}. \tag{104}$$

Die Grössen $\overline{\varDelta}$ stehen zu den am Compensator abgelesenen Schraubenumdrehungen $\varDelta$ in der Beziehung: $23{,}8\,\overline{\varDelta} = -\varDelta$, da der Compensatorspalt wie gewöhnlich parallel zur Druckrichtung war und Na-Licht angewendet wurde.

Bezeichnet man noch die durch Lp dividirten, also auf die Weglänge von 1 mm und den Druck von 1 g pro mm² bezogenen Grössen $\overline{\varDelta}$ mit $\overline{\overline{\varDelta}}$, so ist $\overline{\overline{\varDelta}} = -\dfrac{\varDelta}{23{,}8}\,\dfrac{B}{P}$, wo P die Gesammtbelastung der Platte, B deren Breite (d. h. die Kantenlänge senkrecht zur Beobachtungs- und Druckrichtung) bezeichnet. Dann lassen sich aus den Ausdrücken 96) bis 104) die nachstehenden Formeln zur Berechnung der $a_{kk}s_{kk}$ ableiten:

$$\left|\begin{aligned}
\frac{a_{44}s_{44}}{v^2} &= \frac{2\lambda}{n_m^3}\left\{\overline{\overline{\varDelta}}_{23}+\overline{\overline{\varDelta}}_{32}-\tfrac{1}{2}(\overline{\overline{\varDelta}}_{31}+\overline{\overline{\varDelta}}_{21})-2\overline{\overline{\varDelta}}_{1}\right\},\\
\frac{a_{55}s_{55}}{v^2} &= \frac{2\lambda}{n_m^3}\left\{\overline{\overline{\varDelta}}_{31}+\overline{\overline{\varDelta}}_{13}-\tfrac{1}{2}(\overline{\overline{\varDelta}}_{32}+\overline{\overline{\varDelta}}_{12})-2\overline{\overline{\varDelta}}_{2}\right\},\\
\frac{a_{66}s_{66}}{v^2} &= \frac{2\lambda}{n_m^3}\left\{\overline{\overline{\varDelta}}_{12}+\overline{\overline{\varDelta}}_{21}-\tfrac{1}{2}(\overline{\overline{\varDelta}}_{13}+\overline{\overline{\varDelta}}_{23})-2\overline{\overline{\varDelta}}_{3}\right\},
\end{aligned}\right. \tag{105}$$

worin rechts lauter durch die Beobachtungen bekannte Grössen stehen. Demnach

können a_{44}, a_{55}, a_{66} bis auf die unbekannten Factoren s_{44}, s_{55}, s_{66} gefunden werden, welche aber gemäss ihrer Bedeutung als Torsionsmoduln jedenfalls positive Werthe haben.

b. Resultate.

Die Versuchsanordnung war dieselbe wie bei den früheren piëzooptischen Untersuchungen (vergl. S. 79). Zur Ausgleichung des Druckes, der mittelst des am Ende mit Q = ca. 500 bis 1500 g belasteten Hebels auf die Platte ausgeübt wurde, dienten Bleiplatten, die aber nur wenig eingedrückt wurden, sodass der Druck bei der starken Krümmung der Schmalseiten mancher Platten doch oft ungleichmässig vertheilt war. Wenn die Breitseite senkrecht zur Beobachtungsrichtung (also parallel zum Hebel) stand, wurde daher die Verzögerung an mehreren Stellen der Platte (in der Nähe des linken und rechten Randes: l. Rd. und r. Rd., und in der Mitte: M) beobachtet. Auf den Schmalseiten jedoch war meist nur in der Mitte der Compensatorstreifen zur Einstellung deutlich genug, und auch da wurde eine genaue Einstellung oft dadurch erschwert, dass der Streifen schief gegen den Spalt verlief. In den Fällen, wo die Beobachtungsrichtung unter 45° gegen die Symmetrieaxen geneigt war, entstanden ausserdem leicht Fehler durch eine geringe Neigung der Platte nach vorn oder hinten, welche in diesen Fällen eine erhebliche Aenderung des Gangunterschiedes in der Beobachtungsrichtung zur Folge hat. Diese Aenderung konnte hier nicht, wie beim Quarz, vermittelst einer zweiten, in symmetrischer Lage vor die erste gestellten Platte compensirt werden, da keine dazu geeigneten Platten vorhanden waren. Es wurde daher versucht, jenen Fehler dadurch zu eliminiren, dass bei verschiedener Aufstellung der Platte beobachtet wurde, wobei ja die Neigung vermuthlich verschieden ausfiel und es sich also zeigen musste, ob sie grossen Einfluss hatte; auch wurde darauf geachtet, dass der Hebel möglichst wenig seitlich ausweichen konnte, worin sonst der Hauptgrund zu jener schädlichen Neigung der Platte beim Belasten liegt.

Druck $\parallel X^0$, beobachtet $\parallel Y^0$.

Platte 5b, Breitseite. (B = 7,55 mm.)

Q	l. Rd.		M.		r. Rd.	Mittelwerth v. Δ_{12}	$\overline{\overline{\Delta}}_{12}$
944	−0,85		−0,85		−0,65	−0,78	$+6{,}44 \cdot 10^{-5}$
1485	−1,06		−1,02		−1,12	−1,07	$+5{,}46 \cdot 10^{-5}$
	−1,10	−1,03	−0,85	−0,95	−1,20	−1,03	
	−1,17		−1,05		−0,83	−1,02	

Gesammtmittel, wenn man die Beobachtungen bei grösserem Q mit dreifachem Gewicht rechnet:

$$\overline{\overline{\Delta}}_{12} = +5{,}70 \cdot 10^{-5}.$$

Druck ‖ X^0, beobachtet ‖ Z^0.

Platte 5b, Schmalseite. (B = 4,0 mm.)

Q	Δ_{13}	$\overline{\overline{\Delta}}_{13}$
472	− 0,85 (bei 2 verschiedenen Aufstellungen)	$+ 7{,}42 \cdot 10^{-5}$
1485	— 2,20 — 2,40 — 2,23	$+ 6{,}35 \cdot 10^{-5}$

Platte 5a, Schmalseite. (B = 3,55 mm.)

$Q = 1485$. $\Delta_{13} = -2{,}35$ (zweimal beob.) $\overline{\overline{\Delta}}_{13} = +5{,}8 \cdot 10^{-5}$.

Zusammen $\overline{\overline{\Delta}}_{13} = +\mathbf{6{,}5 \cdot 10^{-5}}$.

Druck ‖ Y^0, beobachtet X^0.

Platte 4. Breitseite. (B = 8,53 mm.)

Q	l. Rd.	M.	r. Rd.	Δ_{21}	$\overline{\overline{\Delta}}_{21}$
944	— 0,77	— 0,73	— 0,75	— 0,75	$+ 7{,}00 \cdot 10^{-5}$
1485	— 1,22	— 1,05	— 1,08	— 1,117	$+ 6{,}64 \cdot 10^{-5}$
	— 1,10	— 1,12	— 1,15	— 1,123	

Gesammtmittel: $\overline{\overline{\Delta}}_{21} = +\mathbf{6{,}76 \cdot 10^{-5}}$.

Druck ‖ Y^0, beobachtet ‖ Z^0.

Platte 4, Schmalseite. (B = 3,17 mm.)

Q	Δ_{23}	$\overline{\overline{\Delta}}_{23}$
472	— 0,90	$+ 6{,}26 \cdot 10^{-5}$
944	— 1,90	$+ 6{,}60 \cdot 10^{-5}$
1485	— 2,95 — 3,00	$+ 6{,}56 \cdot 10^{-5}$

Gesammtmittel: $\overline{\overline{\Delta}}_{23} = +\mathbf{6{,}52 \cdot 10^{-5}}$.

Druck ‖ Z^0, beobachtet ‖ X^0.

Platte 4, Breitseite. (B = 8,53 mm.)

Q	l. Rd.	M.	r. Rd.	Δ_{31}	$\overline{\overline{\Delta}}_{31}$
944	— 0,22	— 0,22	— 0,22	— 0,22	$+ 2{,}05 \cdot 10^{-5}$
1485	— 0,28	— 0,30	— 0,33	— 0,30	$+ 1{,}85 \cdot 10^{-5}$
	— 0,32	— 0,34	— 0,30	— 0,32	

Platte 5b, Schmalseite.

Q	Δ_{31}	$\overline{\overline{\Delta}}_{31}$	
944	— 0,59	$+ 2{,}58 \cdot 10^{-5}$	$2{,}12 \cdot 10^{-5}$
1485	— 0,60	$+ 1{,}66 \cdot 10^{-5}$	

Platte 5a, Schmalseite.

Q	Δ_{31}	$\overline{\overline{\Delta}}_{31}$
1485	— 0,89	$+ 2{,}20 \cdot 10^{-5}$

Gesammtmittel $\overline{\overline{\Delta}}_{31} = +\mathbf{2{,}05 \cdot 10^{-5}}$.

Druck ∥ Z^0, beobachtet ∥ Y^0.

Platte 4, Schmalseite.

$$Q = 944, \quad \Delta_{32} = -1{,}40, \quad \overline{\overline{\Delta}}_{32} = +4{,}86 \cdot 10^{-5}.$$

Platte 5b, Breitseite. (B = 7,25 mm.)

Q	l. Rd.	M.	r. Rd.	Δ_{32}	$\overline{\overline{\Delta}}_{32}$
1485	−1,20	−0,96	−0,70	−0,95	$+4{,}8 \cdot 10^{-5}$
	(−1,05	−1,00	−1,26	−1,10)	
	−0,90	−0,95	−0,97	−0,94	
	(−0,68	−0,75	−0,95	−0,79)	
944		−0,67			$+5{,}35 \cdot 10^{-5}$
		−0,65			

Gesammtmittel: $\overline{\overline{\Delta}}_{32} = +\mathbf{5{,}0 \cdot 10^{-5}}$.

Druck- und Beobachtungsrichtung ∥ den Halbirungslinien der Winkel zwischen Y^0 und Z^0.

Platte 1a, Schmalseite. (B = 3,35 mm.)

Q	1te Druckrichtung	2te Druckrichtung	Δ_1 im Mittel	$\overline{\overline{\Delta}}_1$
944	−1,35	−1,30	−1,316	$+4{,}83 \cdot 10^{-5}$
	−1,30	−1,315		
1005	−1,35	−1,38	−1,375	$+4{,}75 \cdot 10^{-5}$
1485	−1,95	−2,00	−1,975	$+4{,}60 \cdot 10^{-5}$

Platte 1b, Schmalseite. (B = 2,8 mm.)

$$Q = 944 \begin{cases} \text{1. Druckrichtung: } \Delta_1 = -1{,}47 \\ \text{2. \quad „ \quad „ \quad } \Delta_1 = -1{,}55 \end{cases} -1{,}51. \quad \overline{\overline{\Delta}}_1 = +4{,}63 \cdot 10^{-5},$$

Gesammtmittel: $\overline{\overline{\Delta}}_1 = +\mathbf{4{,}73 \cdot 10^{-5}}$.

Druck- und Beobachtungsrichtung ∥ den Halbirungslinien der Winkel zwischen Z^0 und X^0.

Platte 2b, Schmalseite. (B = 4,02 mm.)

Q	Druckrichtung +45°.	Druckrichtung −45°.
944	Δ_2 = +0,20 bis 0,40	ca. +0,30
1485		+0,40

Bei mehrfacher Wiederholung der Versuche mit der Belastung Q = 1485 g wurden bei beiden Druckrichtungen sehr kleine, überwiegend positive Werthe

von $\varDelta_2$, die höchstens $+0,55$ erreichten, und nur einmal ganz kleine negative Werthe beobachtet. Diese Unterschiede rührten wahrscheinlich von kleinen Neigungen der Platte beim Comprimiren her. Meist war die Aenderung bei guter Aufstellung so klein, dass sie überhaupt kaum messbar war. Es mag als wahrscheinlicher Werth $+0,40$ für 1500 g angenommen werden, woraus folgt

$$\overline{\overline{\varDelta}}_2 = -1,1 \cdot 10^{-5}.$$

Druck- und Beobachtungsrichtung ∥ den Halbirungslinien der Winkel zwischen X^0 und Y^0.

Platte 3, Schmalseiten. ($B = 3,20$ mm.)

Q	1te Druckrichtung	2te Druckrichtung	$\varDelta_3$ im Mittel.	$\overline{\overline{\varDelta}}_3$
944	$-1,52$	$-1,60$	$-1,56$	$+5,39 \cdot 10^{-5}$
	$-1,45$	$-1,59$	$-1,52$	
1485	$-2,33$	$-2,45$	$-2,39$	$+5,32 \cdot 10^{-5}$

Gesammtmittel: $\overline{\overline{\varDelta}}_3 = +5,36 \cdot 10^{-5}$.

Es haben sich also schliesslich folgende durchschnittliche Werthe der Grössen $\overline{\overline{\varDelta}}$ ergeben:

$$\overline{\overline{\varDelta}}_{23} = +6,52 \cdot 10^{-5}, \quad \overline{\overline{\varDelta}}_{31} = +2,05 \cdot 10^{-5}, \quad \overline{\overline{\varDelta}}_{12} = +5,70 \cdot 10^{-5},$$
$$\overline{\overline{\varDelta}}_{32} = +5,0 \cdot 10^{-5}, \quad \overline{\overline{\varDelta}}_{13} = +6,5 \cdot 10^{-5}, \quad \overline{\overline{\varDelta}}_{21} = +6,76 \cdot 10^{-5},$$
$$\overline{\overline{\varDelta}}_{1} = +4,73 \cdot 10^{-5}, \quad \overline{\overline{\varDelta}}_{2} = -1,1 \cdot 10^{-5}, \quad \overline{\overline{\varDelta}}_{3} = +5,36 \cdot 10^{-5},$$

und durch Einsetzung derselben in die Formeln 105) folgt:

$$\frac{a_{44}\,s_{44}}{v^2} = \frac{2\lambda}{n_m^3}\{11,52 - 4,4 - 9,5\} \cdot 10^{-5} = -2,4 \cdot \frac{2\lambda}{n_m^3} \cdot 10^{-5},$$
$$\frac{a_{55}\,s_{55}}{v^2} = \frac{2\lambda}{n_m^3}\{8,55 - 5,35 + 2,2\} \cdot 10^{-5} = +5,4 \cdot \frac{2\lambda}{n_m^3} \cdot 10^{-5},$$
$$\frac{a_{66}\,s_{66}}{v^2} = \frac{2\lambda}{n_m^3}\{12,46 - 6,51 - 10,71\} \cdot 10^{-5} = -4,8 \cdot \frac{2\lambda}{n_m^3} \cdot 10^{-5}.$$

Setzt man nun für n_m in allen drei Fällen den Werth 1,493, ferner $\lambda = 589 \cdot 10^{-6}$ ein, so erhält man für die piëzooptischen Constanten $\frac{a_{hh}}{v^2}$ für Natriumlicht die nachstehenden Werthe:

$$\frac{a_{44}}{v^2} = -0{,}85 \cdot \frac{10^{-8}}{s_{44}},$$
$$\frac{a_{55}}{v^2} = +1{,}9 \cdot \frac{10^{-8}}{s_{55}},$$
$$\frac{a_{66}}{v^2} = -1{,}7 \cdot \frac{10^{-8}}{s_{66}}.$$

Diese Werthe unterliegen allerdings einer grossen Unsicherheit, weil sie aus je fünf Grössen, deren jede nur ziemlich ungenau bestimmt werden konnte, abgeleitet sind. Die Extreme, welche man durch Combination der grössten und kleinsten Werthe $\overline{\overline{\varDelta}}$ ungünstigsten Falls erhalten könnte, sind:

$$\text{für } \frac{a_{44}s_{44}}{v^2} \cdot 10^8: \quad -0{,}46 \text{ und } -1{,}16,$$
$$\text{„ } \frac{a_{55}s_{55}}{v^2} \cdot 10^8: \quad +0{,}5 \text{ und } +2{,}8,$$
$$\text{„ } \frac{a_{66}s_{66}}{v^2} \cdot 10^8: \quad -1{,}0 \text{ und } -2{,}1,$$

sodass also wenigstens die Vorzeichen, welche zugleich diejenigen der a_{hh} selbst sind, als sicher festgestellt gelten dürfen. Die absoluten Werthe der a_{hh} selbst, auf die es uns schliesslich ankommt, können ja überdies gegenwärtig nicht berechnet werden, da die Torsionsmoduln s_{hh} nicht bekannt sind. Um wenigstens ihre Grössenordnung abzuschätzen, wird man für letztere etwa einen Werth annehmen können, wie er für andere Salze gefunden ist. Nach den Bestimmungen von Herrn Voigt ist für

	Steinsalz	Sylvin	Natriumchlorat
$s_{44} \cdot 10^8 =$	$+77$	$+153$	$+82.$

Man kann also wohl annehmen, dass die Werthe a_{hh} etwa $\frac{1}{100}$ der oben bestimmten $a_{hh}s_{hh} \cdot 10^8$ betragen werden, und dies ist auch die Grössenordnung der für mehrere regulär krystallisirende Salze früher von mir gefundenen Grössen a_{44}; es ist nämlich:

	für Steinsalz	Sylvin	Flussspath	Natriumchlorat
$\frac{a_{44}}{v^2} =$	$-0{,}0108$	$-0{,}028$	$+0{,}023$	$-0{,}020.$

Bemerkenswerth ist das positive Vorzeichen der piëzooptischen Constante a_{55} des Seignettesalzes im Gegensatz zu dem (gewissermaassen normalen) negativen der beiden anderen.

§ 6. Schlussfolgerungen aus den Beobachtungsresultaten für Seignettesalz.

Wir wollen nun sehen, was sich aus den gewonnenen Resultaten über die Frage der Gleichheit der e_{hk} und e'_{hk} schliessen lässt, d. h. über die Gültigkeit

der Annahme, dass die optische Wirkung des elektrischen Feldes lediglich aus der Deformation des Krystalles so berechnet werden könne, als ob dieselbe mechanisch erzeugt wäre.

Wir haben erhalten

$$\delta_{14} = +340 \cdot 10^{-8} \text{ bis } +1180 \cdot 10^{-8}, \qquad \delta_{25} = -165 \cdot 10^{-8}, \qquad \delta_{36} = +35{,}4 \cdot 10^{-8};$$

folglich wird nach 91) bei Benutzung der am Schlusse von § 5 gefundenen Mittelwerthe der $\frac{a_{hh} s_{hh}}{v^2}$:

$$\frac{e'_{41} \varkappa_1}{v^2} = -290 \cdot \frac{10^{-16}}{s_{44}} \text{ bis } -1000 \cdot \frac{10^{-16}}{s_{44}},$$

$$\frac{e'_{52} \varkappa_2}{v^2} = -314 \cdot \frac{10^{-16}}{s_{55}},$$

$$\frac{e'_{63} \varkappa_3}{v^2} = -60 \cdot \frac{10^{-16}}{s_{66}}.$$

Dagegen ergaben die directen Beobachtungen:

$$\frac{e_{41} \varkappa_1}{v^2} = -5 \cdot 10^{-8} \text{ bis } -17 \cdot 10^{-8},$$

$$\frac{e_{52} \varkappa_2}{v^2} = -5{,}07 \cdot 10^{-8},$$

$$\frac{e_{63} \varkappa_3}{v^2} = +0{,}95 \cdot 10^{-8}.$$

Bei e_{41} und e'_{41}, sowie bei e_{52} und e'_{52} stimmt das Vorzeichen überein. Die absolute Grösse ist bei $e_{41} \varkappa_1$ und $e'_{41} \varkappa_1$ in zu weiten Grenzen unbestimmt geblieben, als dass sich aus ihr etwas schliessen liesse; bei e_{52} und e'_{52} würde sie übereinstimmen, wenn der Torsionsmodul $s_{55} = 61{,}8 \cdot 10^{-8}$ wäre, welcher Werth im Vergleich zu den oben mitgetheilten für andere Salze allerdings kleiner erscheint, als man vermuthen würde, aber noch nicht so unwahrscheinlich ist, dass man auf eine thatsächliche Verschiedenheit von e_{52} und e'_{52} schliessen dürfte. Anders liegt die Sache bei e_{63} und e'_{63}, denn hier sind die Vorzeichen verschieden, man kann also, ohne den Werth von s_{66} zu kennen, den Schluss ziehen, dass eine dielektrische Polarisation parallel der c-Axe in anderer Weise auf das optische Verhalten einwirkt, als nur durch Vermittelung der mit ihr verbundenen Deformation des Krystalles. Doch ist dieses Resultat hier nicht ganz so sicher wie beim Quarz und Natriumchlorat, weil die optischen Beobachtungen, aus welchen in § 3 der Werth von $\frac{e_{63} \varkappa_3}{v^2}$ abgeleitet wurde, sehr kleine und schwer genau messbare Aenderungen betrafen. Sollte es später gelingen, den Torsionsmodul s_{55} des Seignettesalzes zu bestimmen, so würden die oben gefundenen Werthe von e_{52} und e'_{52} sich vielleicht noch besser zur Entscheidung der aufgeworfenen Frage eignen.

Endlich sei noch einmal hervorgehoben, dass dielektrische Polarisation parallel der a-Axe auch von einer starken, sich mit dem Elektrisirungssinne nicht umkehrenden Aenderung der Doppelbrechung begleitet ist, welche kaum durch eine entsprechende Deformation erklärbar erscheint und somit ebenfalls auf eine directe optische Wirkung des elektrischen Feldes hindeutet. —

Insgesammt führen die Resultate der vorliegenden Arbeit dazu, die zu Anfang (S. 2) gestellte Frage dahin zu beantworten, dass elektrostatische Kräfte einen directen Einfluss auf die Lichtbewegung in piezoelektrischen Krystallen ausüben.

Inhaltsübersicht.

IV. Theil. Turmalin.

V. Theil. Seignettesalz.
